КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ МБФ

П.И. Гутенев

КУРСОВЫЕ ЗАДАНИЯ

по обыкновенным дифференциальным уравнениям

Медико-биологический факультет

отделение медицинской и биологической кибернетики

2-ой курс 3-й семестр

Под редакцией профессора Акимова В.Н.

Москва 2014

А Н Н О Т А Ц И Я

Пособие содержит начальные сведения об обыкновенных дифференциальных уравнениях и методах их решения в соответствии с программой принятой на медико-биологическом факультете РГМУ. В пособии рассматриваются метод изоклин, метод ломанных Эйлера и решение обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью рядов. Эти методы излагаются в контексте интегрированного математического пакета Maple 11 с целью развития у студентов интереса к использованию персональных компьютеров для решения математических задач. Конспективно излагаются алгоритмы элементарных методов интегрирования и методов решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В заключение предлагаются два комплекта вариантов контрольных работ, включающих кроме чисто математических геометрические и физические задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ

Рассмотрим *дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (1)

Обозначим через α угол между касательной к *интегральной кривой* $y = y(x)$ в точке (x, y) и положительным направлением оси Ox. Принимая во внимание, что $tg\alpha = y'$, а $y' = f(x, y)$, получаем $tg\alpha = f(x, y)$, следовательно, направление касательных к интегральным кривым задается самим дифференциальным уравнением.

Проведя в каждой точке (x, y) из области определения функции f(x,y) отрезок единичной длины с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси Ox угол α, где tgα = f(x, y), получим так называемое *поле направлений* (рис.1). Изучая поле направлений, определяемое заданным дифференциальным уравнением, мы получаем некоторое представление об интегральных кривых этого уравнения, а иногда и сами интегральные кривые. При построении и изучении поля направлений большой интерес представляют *изоклины* – линии, во всех точках которых направление поля одно и то же. Уравнение изоклины имеет вид: $f(x, y) = k,$ где k – постоянная. Чтобы приближенно построить семейство интегральных кривых можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести интегральные кривые, которые в точках пересечения с изоклинами $f(x, y) = k_1, f(x, y) = k_2, \ldots$ имеют касательные с угловыми коэффициентами $k_1, k_2, \ldots$.Среди всех изоклин выделим так называемую *« нуль» - изоклину* или *линию экстремумов,* на ней f(x, y) = k = 0. Линия экстремумов делит область определения уравнения (1) на подобласти, внутри которых y' сохраняет знак, а интегральные кривые изменяются монотонно. При переходе через «нуль» - изоклину интегральная кривая имеет экстремум, если k меняет знак на противоположный, или точку перегиба, если k не меняет знак. Линия, удовлетворяющая уравнению: $y'' = f_x' + f_y' f = 0$, является *линией точек перегиба* интегральных кривых. Линия точек перегиба делит область определения уравнения (1) на подобласти, внутри которых y'' сохраняет знак и интегральные линии имеют одинаковую выпуклость. С помощью этой линии можно определить характер экстремума достигаемого интегральной кривой на «нуль» - изоклине. Если $\begin{cases} y'' = f_x', \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$ и $y'' > 0$ то интегральная линия имеет минимум, при $y'' < 0$ интегральная линия имеет максимум на линии экстремумов. Изоклины, линии экстремумов и линии изменения выпуклости дают достаточно сведений о поле направлений, чтобы схематически построить графики интегральных кривых. Если структура поля направлений достаточно проста то, можно ограничиться линией экстремумов, изоклинами с $f(x, y) = \pm\infty$ и линией точек перегиба для изображения поля направлений. При построении семейства интегральных кривых следует проверить непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение не являются ли изоклины, линии экстремумов и линии точек перегиба интегральными кривыми.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Если функция $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) аналитическая, т.е. разлагается в ряд по степеням $(x - x_0)$ $и$ $(y - y_0)$, то решение уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием

$$y(x_0) = y_0$$

тоже является аналитической функцией, т.е. разлагается в степенной ряд в окрестности точки x_0.Ищем решение в виде ряда:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots$$

Коэффициенты a_0 и a_1 определяются из начальных условий. Подставим ряд в дифференциальное уравнение и представим правую часть в виде степенного ряда. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$ в обеих частях уравнения, получим цепочку уравнений для определения остальных коэффициентов: $a_2, a_3, a_4, \dots$.Другой путь определения коэффициентов a_k основан на формуле:

$$a_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Подставим начальные условия в уравнение, получим $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Последовательно вычисляя полные производные от обеих частей уравнения, получим $y^{(k)}(x_0)$ произвольного порядка, например: $y^{(2)}(x_0) = f'_x + f'_y f$ в (x_0, y_0),

$$y^{(3)}(x_0) = f''_{xx} + 2f''_{xy}f + f''_{yy}f^2 + f'_y f'_x + (f'_y)^2 f \quad \text{в } (x_0, y_0), \text{ и т.д.}$$

МЕТОД ЛОМАННЫХ ЭЙЛЕРА

Искомая интегральная кривая уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, проходящая через точку $y(x_0) = y_0$, заменяется ломанной, состоящей из прямолинейных отрезков, каждое звено которой касается интегральной кривой в одной из своих граничных точек. Для приближенного вычисления значения искомого $y(x)$ в точке $x = b$, отрезок $x_0 \le x \le b$ делится на n равных частей точками: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$= b, x_{i+1} - $x_i = h$, $h = \frac{b - x_0}{n}$ - шаг вычиления. Приближенное значение $y(x_i) = y_i$. Для вычисления y_i заменяем искомую интегральную кривую на отрезке $x_{i-1} \le x \le x_i$ отрезком ее касательной в точке (x_{i-1}, y_{i-1}):

$$y_i = y_{i-1} + h * y'_{i-1} \text{ , где } y'_{i-1} = f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

Естественно ожидать, что при $h \to 0$ ломанные Эйлера приближаются к графику искомой интегральной кривой.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В прикладных задачах прежде всего надо решить, какую из величин взять за независимую переменную, а какую за искомую функцию. Затем надо найти, на сколько изменится искомая функция y=y(x) , когда независимая переменная x получит приращение Δx. Выразить приращение искомой функции: $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче, используя соответствующие физические законы или геометрические теоремы. Разделив Δy на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение для искомой функции. Для решения задачи необходимо найти общее решение полученного уравнения. Если требуется для ответа на поставленные в задаче вопросы, выделить из общего решения частное решение с помощью приведенных в задаче начальных условий.

ЗНАКОМСТВО С ВОЗМОЖНОСТЯМИ ИНТЕГРИРОВАННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MAPLE 11.

В настоящее время системы компьютерной алгебры (символьных или аналитических вычислений) стали доступны всем обладателям персональных компьютеров. К числу наиболее замечательных программ такого типа можно отнести программу Maple 11 компании Maple Waterloo. Весьма поучительно решать обыкновенные дифференциальные уравнения двумя путями: вручную (аналитически) и на компьютере (численно, символьно).

Такая практика развивает алгоритмическое мышление, знакомит с элементами программирования и служит целям самопроверки. Ниже приводится описание типичного протокола решения задач.

ОПИСАНИЕ ПРИМЕРНОГО ПРОТОКОЛА РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ MAPLE 11.

> **restart; -** Очистка внутренней памяти перед выполнением новой задачи.
> **with(DEtools): -** Команда загрузки пакета средств обработки дифференциальных уравнений.
> **ode1:=diff(y(x),x)+x^2-y(x); -** Задание обыкновенного дифференциального уравнения.

$$ode1 := \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + x^2 - \mathrm{y}(x)$$

> **dsolve(ode1); -** Команда символьного решения заданного уравнения.

$\mathrm{y}(x) = 2 + 2\,x + x^2 + \mathbf{e}^x\,\_C1$ - Общее решение заданного уравнения.

> **DEplot(ode1,y(x), x = -2.5..3, y = -2.5..2.5,Title =`Restricted domain`, color = black); -** Команда изображения поля направлений в выбранной ограниченной области (окрестность

начальной точки).

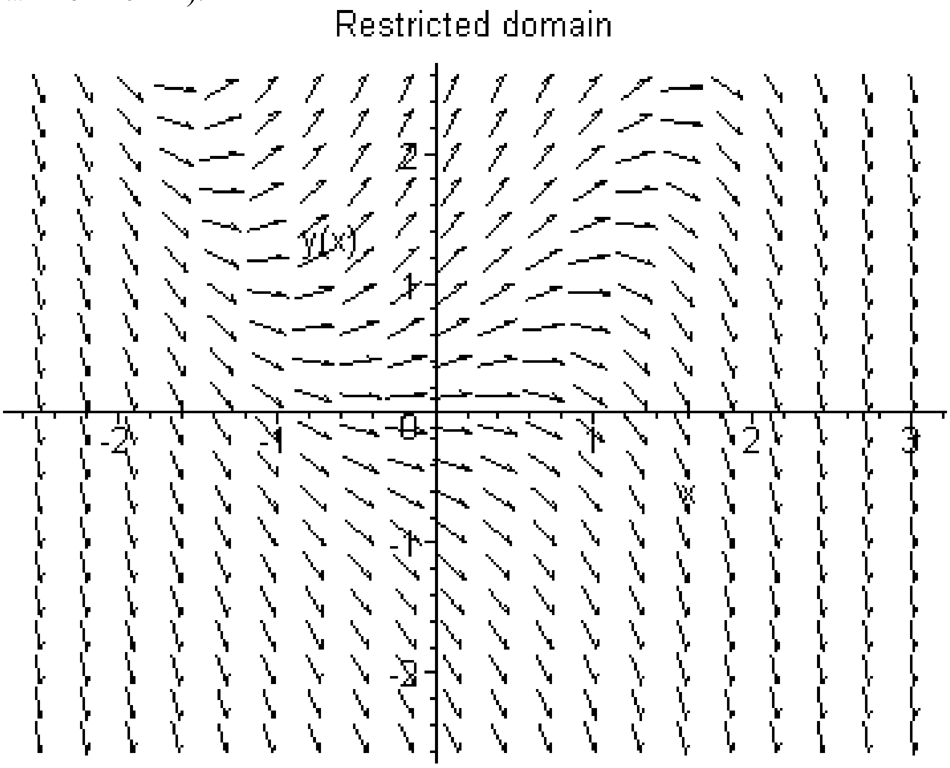


Рис.1. Поле направлений уравнения $y' = y - x^2$. В окрестности точки (0,1).

ff:=dsolve({ode1=0,y(0)=1.0},{y(x)},type=numeric,method=rosenbrock,output=procedurelist);- Команда численного решения начальной задачи (задание начальных условий, выбор метода численного решения и процедуры вывода значения искомой функции в конечной точке)

$$ff := \mathbf{proc}\ (x\_rosenbrock)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

> **ff(0); -**Вывод начальных условий.

$$[x = 0.,\ y(x) = 1.]$$

> **ff(1.0); -** Вывод решения в конечной точке.

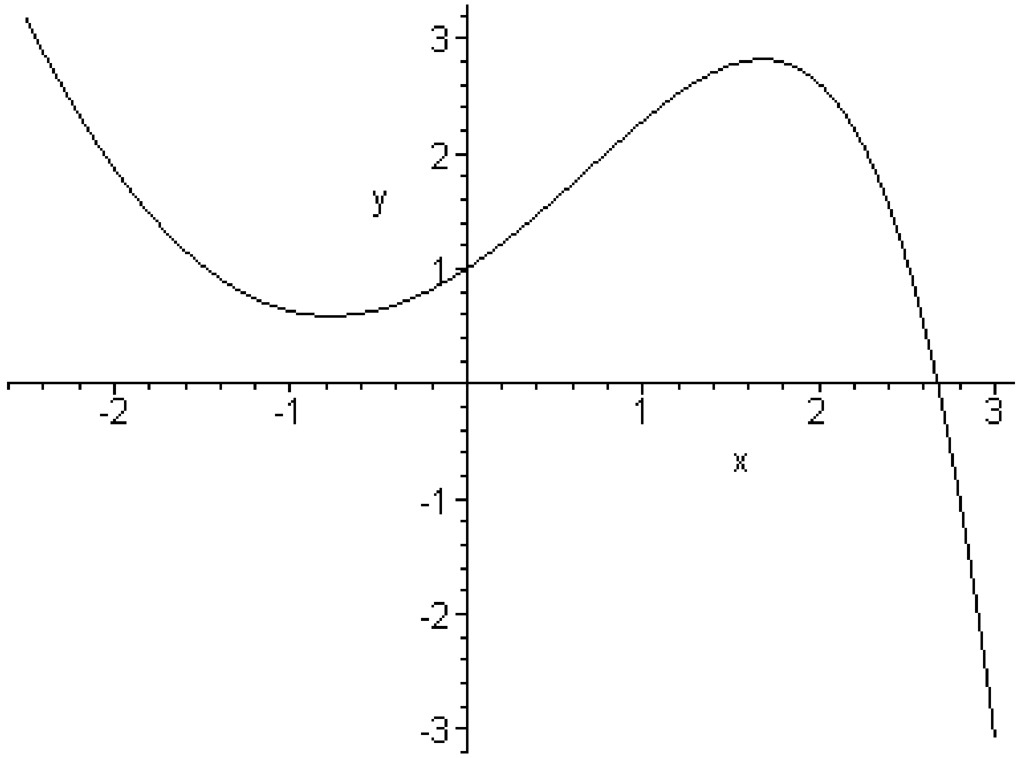
$$[x = 1.0,\ y(x) = 2.28171865943813\ ]$$

> **with(plots, odeplot); -**Команда загрузки пакета средств двумерной графики.

$$[odeplot]$$

> **odeplot(ff,[x,y(x)],-2.5..3.0,numpoints=1000,color=black);-** Команда построения графика интегральной кривой, проходящей через начальную точку (в выбранном интервале

независимой переменной)

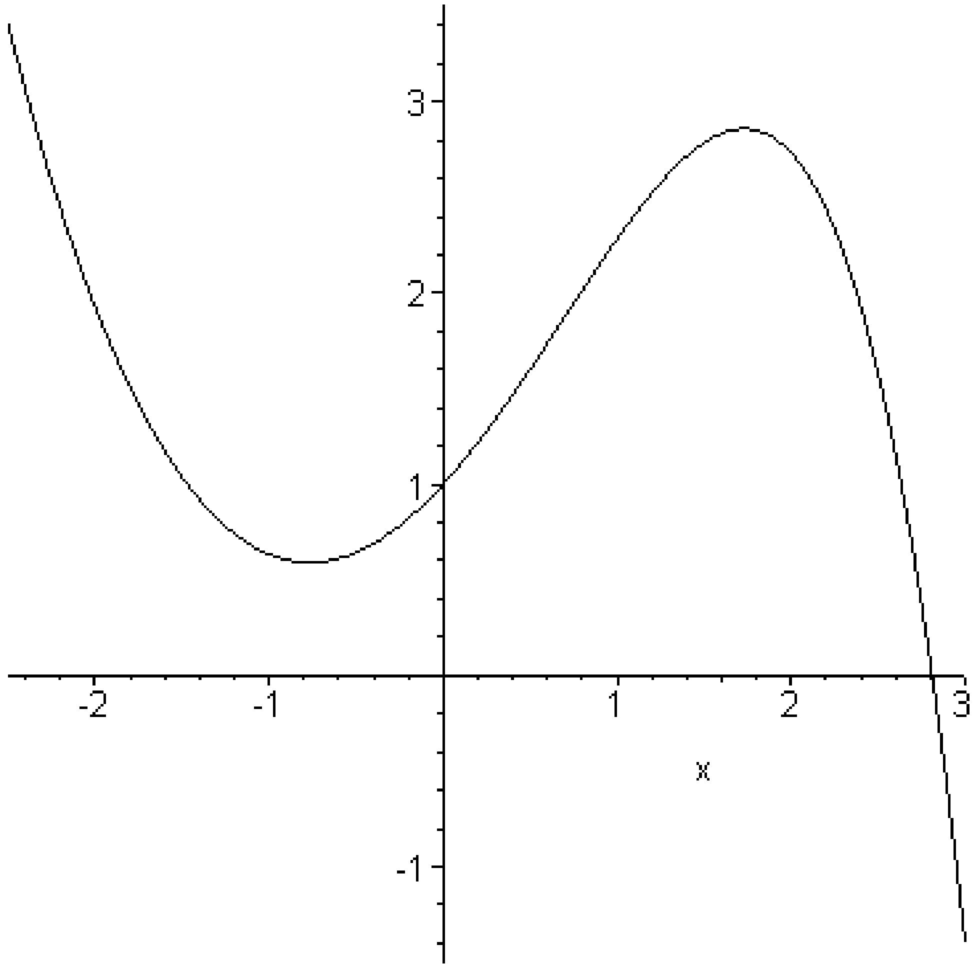


> **fg:=dsolve({ode1= 0, y(0) = 1} , y(x), type = series);** - Команда приближенного решения начальной задачи с помощью степенного ряда (максимальная степень подбирается автоматически).

$$fg := \mathrm{y}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

> plot(1+x+x^2/2-x^3/6-x^4/24-x^5/120,x=-2.5..3.0,color=black);

Команда построения графика ряда, аппроксимирующего решение начальной задачи. Сравнить с графиком численного решения полученным выше.



ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1.*Уравнение с разделенными переменными* имеет вид $X(x)dx + Y(y)dy = 0$. Общим интегралом такого уравнения будет выражение: $\int X(x)dx + \int Y(y)\,dy = C$.

2.*Уравнение с разделяющимися переменными* имеет вид $X(x)Y_1(y)dx + X_1(x)Y(y)dy = 0$. После деления на $X_1(x)Y_1(y)$ обоих частей уравнения получим уравнение с разделенными переменными. Общим интегралом такого уравнения будет выражение: $\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy = C$.

3. Если уравнение может быть приведено к виду: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ или $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - однородные функции одной и той же степени то *уравнение называется однородным*. Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены: $y = zx, y' = xz' + z,$ где $z = z(x) -$ новая искомая функция.

4. *Линейные уравнения* – это уравнения содержащие y(x) и $y'(x)$ в первой степени: $y' + p(x)y = q(x)$. Если $q(x) \not\equiv 0$ уравнение является линейным неоднородным. Вначале находим общее решение соответствующего однородного уравнения: $y' + p(x)y = 0$ –- $y_1 = Ce^{-\int P(x)dx}$. Общее решение неоднородного уравнения можно найти при помощи y_1, варьируя в нем произвольную

постоянную, т.е. полагая $y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, где C(x) – неизвестная непрерывно дифференцируемая функция от x – метод Лагранжа. Для определения C(x) подставляем y(x) в неоднородное уравнение. Получим: $C(x)'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, откуда

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C_1, \text{ а } y(x) = e^{-\int p(x)dx}(C_1 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx)$$

5. Если левая часть уравнения $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$ (необходимые и достаточные условия для этого : $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ в односвязной области) - такое уравнение называется уравнением в полных дифференциалах и может быть записано в виде: $dU(x,y) = 0$. Его общий интеграл – $U(x,y) = C$. Функцию $U(x,y)$ можно найти двумя способами:

а) с помощью криволинейных интегралов $U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,u)du$

или $U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} N(x,u)du$.

б) интегрируя систему уравнений: $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1.Уравнения вида $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0$ (1) , где $a_i \in R$, являются однородными и линейными по отношению искомой функции $y(x)$ и ее производных. Будем искать решение уравнения (1) в виде e^{kx}. Подставляя в уравнение и сокращая на e^{kx}, получим характеристическое уравнение:

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \cdots a_{n-1}k + a_n = 0$$

Находим все его корни $k_1, k_2, \ldots\ k_n$. Если все корни вещественные и различные, получим n частных линейно независимых решений уравнения (1): $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}$.Общее решение уравнения (1) имеет вид линейной комбинации этих частных решений:

$$y = \sum_1^n C_i\, e^{k_ix},$$

где C_i – произвольные вещественные числа. Паре комплексно сопряженных корней характеристического уравнения $k_j = \alpha + i\beta, k_{j+1} = \alpha - i\beta$ соответствует пара вещественных линейно независимых решений уравнения (1), которые входят в общее решение в виде суммы:

$$\ldots + e^{\alpha x}\left(C_j sin\beta x + C_{j+1}\cos\beta x\right) + \cdots$$

Если k- корень характеристического уравнения кратности s≥ 1 то функции $e^{kx},\ xe^{kx}, x^2e^{kx}, \ldots, x^{s-1}e^{kx}$- являются линейно независимыми решениями уравнения (1) и входят в общее решение в виде суммы:

$$\ldots + e^{kx}(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_{s-1}x^{s-1}) + \cdots$$

2.Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = f(x) \quad (2),$$

где $f(x)$ – непрерывная функция. Общее решение уравнения (2) равно сумме $y = y_1 + y_2$, здесь $y_1 -$ общее решение соответствующего однородного уравнения, а $y_2 -$ какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения. y_2 можно найти методом вариации постоянных или методом неопределенных коэффициентов (если правая часть уравнения – квазимногочлен).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

1.Для данного дифференциального уравнения выполнить:

а) построить изоклины и на их основе изобразить поле направлений, найти линию экстремумов и линию точек изменения выпуклости (если это возможно).

б) построить несколько интегральных линий (так чтобы они касались поля направлений).

в) найти общее решение. Для интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0) найти значение y в точке $x = 1$.
г) Использовать численный метод ломанных Эйлера с шагом $h = 0.2$.
д) Применить разложение искомого решения в ряд Тейлора (до 4-ой степени). Если найдено точное решение уравнения, определить, какой из методов дает лучшую аппроксимацию этого решения.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1.

1.$y' = -y + x^2$, $(x_0, y_0) = (0,1)$, $y(1) = ?$

2.$y' = y + x^2$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $y(1) = ?$

3.$y' = y + x$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $y(1) = ?$

4. $y' = y - x^3$, $(x_0, y_0) = (0,1)$, $y(1) = ?$

5.$y' = y - x^2$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $y(1) = ?$

6. $y' = xy$, $(x_0, y_0) = (0,1)$, $y(1) = ?$

7. $y' = -xy$, $(x_0, y_0) = (0,1)$, $y(1) = ?$

8. $y' = -2x/y$, $(x_0, y_0) = (0\,, 1.5)$, $y(1) = ?$

9. $y' = y - e^x$, $(x_0, y_0) = (0\,, 1)$, $y(1) = ?$

10. $y' = \frac{y-x}{y+x}$, $(x_0, y_0) = (0\,, 1)$, $y(1) = ?$

11. $y' = 1 + \sin(y - x)$, $(x_0, y_0) = (0\,,\ \pi/2)$, $(1) = ?$

12. $y' = \frac{1-x^2}{y^2}$, $(x_0, y_0) = (0\,, 1/2)$, $y(1) = ?$

13. $y' = \frac{2-x}{y}$, $(x_0, y_0) = (0\,, 2)$, $(1) = ?$

14. $y' = 1 + \cos(x - y)$, $(x_0, y_0) = (0\,, 0)$, y (1) = ?

15. $y' = \frac{y}{y+x}$, $(x_0, y_0) = (0\,, 1)$, $(1) = ?$

16. $y' = \sin\,(y - x)$, $(x_0, y_0) = (0\,, 0)$, y(1) = ?

17. $y' = y - \frac{2x}{y}$, $(x_0, y_0) = (0\,, 2)$, y(1) = ?

18. $y' = y - e^x$, $(x_0, y_0) = (0\,, 1)$, y(1) = ?

19. $y' = y + x^2 - x$, $(x_0, y_0) = (0\,, 1)$, y(1) = ?

20. $y' = y - x^3 + x^2$, $(x_0, y_0) = (0\,, 1)$, y(1) = ?

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2.

ЗАДАНИЕ №1

1.Проинтегрировать уравнение: $(x + 2x^3)dx + (y + 2y^3)dy = 0$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $x(x + 2y)dx + (x^2 \;\; - y^2)dy$.

3.Найти общее решение уравнения: $y' - ysinx = sinxcosx$.

4.Проинтегрировать уравнение: $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Данное уравнение имеет вид: $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где n = 3, т.е. является уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z: $y^{1-n} = z$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$.

6.Решить уравнение: $y'' - 6y' + 8y = 0$.

7.Найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

$2y'' + y' - y = 2e^x$, y(0) = 0, $y'(0) = 1$.

8. Найти форму зеркала, отражающего параллельно данному направлению все лучи, выходящие из заданной точки. (Воспользоваться законом отражения: угол падения равен углу отражения).

ЗАДАНИЕ № 2

1.Проинтегрировать уравнение: x$dy = (y + y^3)dx$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $y' = \frac{y}{x} - 1$.

3.Найти общее решение уравнения: $y' - \frac{y}{x} = x$.

4.Проинтегрировать уравнение: $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$.

Данное уравнение имеет вид: $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где n = 2, т.е. является уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z: $y^{1-n} = z$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.
6.Решить уравнение: $y'' - 5y' + 6y = 0$.

7.Найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:
$y'' - y = x^2$, y(0) = 0, $y'(0) = 0$.
8. В баке находится 100л раствора, содержащего 10кг соли. В бак непрерывно подается вода (5л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Сколько соли в баке останется через час? Считать, что втекающая вода вследствие перемешивания распределяется по всему объему бака равномерно.

ЗАДАНИЕ № 3

1.Проинтегрировать уравнение: x$dy = (y^2 - y)dx$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

3.Найти общее решение уравнения: $y' + 2y = 4x$.

4.Проинтегрировать уравнение: $xy' + y = y^2 lnx$, если $x_0 = 1, y_0 = 1$.

Данное уравнение имеет вид: $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где n = 2, т.е. является уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z: $y^{1-n} = z$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$
6.Решить уравнение: $y'' + y' - 2y = 0$.

7.Найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:
$y'' + y = e^x$, y(0) = 0, $y'(0) = 0$.

8. В воздухе комнаты объемом 200м^3 содержится 0.15% углекислого газа (CO_2). Вентилятор подает в минуту 20м^3 воздуха, содержащего 0.04% CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое? Считать, что втекающий воздух вследствие перемешивания распределяется по всему объему комнаты равномерно.

ЗАДАНИЕ № 4

1.Проинтегрировать уравнение: $xydy = (1 - x^2)dx$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $y' = -\frac{x+y}{x}$.

3.Найти общее решение уравнения: $y' + y = x + 1$.

4.Проинтегрировать уравнение: $2y^2y' + y^3 + x = 0$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $(\frac{1}{x})dy - \left(\frac{y}{x^2}\right)dx = 0$.

6.Решить уравнение: $y'' + 3y' + 2y = 0$

7.Найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

$y'' - y = x^2 - x + 1$, y(0) = 0, $y'(0) = 0$.

8. Тело охладилось за 10 мин. от 100° до 60° .Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°.Когда тело остынет до 25°? Принять, что скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

ЗАДАНИЕ № 5

1.Проинтегрировать уравнение: $dy = e^{x-y}dx$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $y' = -\frac{x+2y}{x}$.

3.Найти частное решение уравнения: $xy' + y = x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = 0$.

4.Проинтегрировать уравнение: $y' - y = xy^2$.

Данное уравнение имеет вид: $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где n = 2, т.е. является уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z: $y^{1-n} = z$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $(6x^2y + 4y^3)dy + (3x^2 + 6xy^2)dx = 0$.

6.Решить уравнение: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

7.Найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

$y'' + y' = 3$, y(0) = 0, $y'(0) = 0$.

8. Кусок металла с температурой a° помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a°до b°. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

ЗАДАНИЕ № 6

1.Проинтегрировать уравнение: $dy = (y-1)(x+1)dx$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $y' = \frac{x-y}{x-2y}$.

3.Найти частное решение уравнения: $y' - \frac{y}{x} = x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = 0$.

4.Проинтегрировать уравнение: $xy' - y = y^2$.

Данное уравнение имеет вид: $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где n = 2, т.е. является уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z: $y^{1-n} = z$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$.

6.Решить уравнение: $y''' + y'' = 0$.

7.Найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:
$y'' + y = e^x + cosx$, y(0) = 0, $y'(0) = 0$.

8. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1.5 м /сек, скорость ее через 4 сек. 1м /сек. Когда скорость уменьшится до 1 см/сек ? Какой путь может пройти лодка до остановки ?

ЗАДАНИЕ № 7

1.Проинтегрировать уравнение: $xdy = \sqrt{y}dx$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

3.Найти частное решение уравнения: $xy' + y - e^x = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = e$.

4.Проинтегрировать уравнение: $xy' + y = y^2 lnx$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = 0$.

6.Решить уравнение: $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

7.Найти решение данного уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным условиям: $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$, y(0) = 0, $y'(0) = 0$.

8. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

ЗАДАНИЕ № 8

1.Проинтегрировать уравнение: $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$.

3.Найти частное решение уравнения: $xy'-\frac{y}{x+1}=x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1)=0$.

4.Проинтегрировать уравнение: $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$.

6.Решить уравнение: $y^{(5)}-10y'''+9y'=0$. Данное уравнение является линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами. Надо составить характеристическое уравнение

7.Найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:
$y''-2y'+y=4e^x$, y(0) = 0, $y'(0)=0$.

8. Количество света поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой толщиной в 2м?

ЗАДАНИЕ № 9

1.Проинтегрировать уравнение: $(y-y^2)dx+xdy=0$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

3.Найти частное решение уравнения: $y'+y=e^x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=0$.

4.Проинтегрировать уравнение: $y'-ytgx+y^2cosx=0$.

Данное уравнение имеет вид: $y'+p(x)y=q(x)y^n$, где n = 2, т.е. является уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z: $y^{1-n}=z$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $yx^{y-1}dx+x^y lnxdy=0$.

6.Решить уравнение: $4y''+4y'+y=0$ при начальных условиях: y(0) = 2, $y'(0)=0$.

7.Найти решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным условиям: $y''-7y'+6y=sinx$, y(0) = 0, $y'(0)=0$.

8._Парашютист прыгнул с высоты 1,5км, а раскрыл парашют на высоте 0,5км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м /сек. Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

ЗАДАНИЕ № 10

1.Проинтегрировать уравнение: $(x^2-1)dx+xydy=0$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $xy'=yln\frac{y}{x}$.

3.Найти частное решение уравнения: $xy'+y=e^x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1)=e$.

4.Проинтегрировать уравнение: $y'+\frac{y}{x}=-xy^2$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$.

6.Решить уравнение: $3y''-2y'-8y=0$ при начальных условиях: y(0) = 1, $y'(0)=0$.

7.Найти решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным

условиям: $y''-2y'+2y=2x$, y(0) = 0, $y'(0)=0$.

8. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака с диаметром 2R=1,8 м и высотой H=2,45 м через отверстие в дне диаметром 2r = 6 см? Ось цилиндра вертикальна. Принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной $0,6\sqrt{2gh}$, где g=10м/сек^2- ускорение силы тяжести, h – высота уровня воды над отверстием.

ЗАДАНИЕ № 11

1.Проинтегрировать уравнение: $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $y'=\frac{y(x-y)}{x^2}$.

3.Найти частное решение уравнения: $y'+2xy=xe^{-x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=1$.

4.Проинтегрировать уравнение: $y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0$.

Данное уравнение имеет вид: $y'+p(x)y=q(x)y^n$, где n = 2, т.е. является уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z: $y^{1-n}=z$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $(x^2 + y)dx + xdy = 0$.

6.Решить уравнение: $3y''' - 9y' = 0$ при начальных условиях: y(0) = 1, $y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

7.Найти решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным

условиям: $y'' - 2y' + 2y = x^2 + 2x$, y(0) = 0, $y'(0) = 0.$

8. Деревянный цилиндрический чурбанчик (S=100см^2, $h = 20$см, $\gamma = 0.5$ г/см^3) полностью погружен в воду и отпущен без начальной скорости. Считая , что сила трения пропорциональна высоте погруженной части, выяснить, каков должен быть коэффициент пропорциональности k , чтобы в результате первого подъема над поверхностью воды показалась ровно половина чурбанчика. Сколько времени (t_1) , будет продолжаться первый подъем? Каково будет уравнение движения при первом подъеме?

ЗАДАНИЕ № 12

1.Проинтегрировать уравнение: $ydx - tgxdy = 0.$

2.Найти общий интеграл уравнения: $y' = \frac{y}{x-y}.$

3.Найти частное решение уравнения: $x^2y' - 2xy = -3$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = 1.$

4.Проинтегрировать уравнение: $y' - ytgx + y^2cosx = 0.$

Данное уравнение имеет вид: $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где n = 2, т.е. является уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z: $y^{1-n} = z.$

5.Найти общий интеграл уравнения: $(x^2 + y)dx + (x + y)dy = 0$.

6.Решить уравнение: $3y''' - 9y' = 0$ при начальных условиях: y(0) = 1, $y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

7.Найти решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным

условиям: $y'' - 2y' + 2y = x^2 + 2x$, y(0) = 0, $y'(0) = 0.$

8.Сила сопротивления воздуха при падении тела с парашютом пропорциональна квадрату скорости движения (коэффициент пропорциональности равен k).Найти предельную скорость падения.

ЗАДАНИЕ № 13

1.Проинтегрировать уравнение: $ydx - (x + 1)dy = 0.$

2.Найти общий интеграл уравнения: $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$

3.Найти частное решение уравнения: $y' - \frac{y}{x} = x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = 1$.

4.Проинтегрировать уравнение: $y' - y - xy^2 = 0$.

Данное уравнение имеет вид: $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где n = 2, т.е. является уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z: $y^{1-n} = z$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $(e^x + y)dx + (x + e^y)dy = 0$.

6.Решить уравнение: $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$ при начальных условиях: y(0) = 1, $y'(0) = 0, y''(0) = 0$.

7.Найти решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным

условиям: $y'' - 2y' + y = 4e^x$, y(0) = 0, $y'(0) = 0$.

8. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Найти закон охлаждения тела, если температура воздуха 20град.С и тело в течение 20 мин. охлаждается от 100 до 60 град.С. Через сколько минут его температура понизится до 30 град.С.

ЗАДАНИЕ № 14

1.Проинтегрировать уравнение: $xydx - (x + 1)dy = 0$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $y' = \frac{x-y}{x-2y}$.

3.Найти частное решение уравнения: $y' + y = x + 1$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$.

4.Проинтегрировать уравнение: $y' + 2y - e^x y^2 = 0$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.

6.Решить уравнение: $y^{(5)} - 8y''' + 16y' = 0$ при начальных условиях: y(0) = 1, $y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 0, y''''(0) = 0$

7.Найти решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным

условиям: $y'' - 2y' = 2e^x$, y(0) = -1, $y'(0) = 0$.

8. В исследованном куске горной породы содержится 100 мг урана и 14мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206г уранового свинца. Определить возраст горной породы. Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и

свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).Использовать закон радиоактивного распада: скорость реакции распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству этого вещества, имеющегося в рассматриваемый момент времени.

ЗАДАНИЕ № 15

1.Проинтегрировать уравнение: $\sqrt{y^2+1}dx - xydy = 0$.

2.Найти общий интеграл уравнения: $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

3.Найти частное решение уравнения: $x^2y' + xy + 1 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = 0$.

4.Проинтегрировать уравнение: $y' + \frac{y}{x+1}y + y^2 = 0$.

Данное уравнение имеет вид: $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где n = 2, т.е. является уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z: $y^{1-n} = z$.

5.Найти общий интеграл уравнения: $\frac{y}{x}dx + (y^3 + lnx)dy = 0$.

6.Решить уравнение: $y''' - y'' - y' + y = 0$ при начальных условиях: y(0) = 1, $y'(0) = 1, y''(0) = 0$

7.Найти решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным

условиям: $y'' + y = 4e^x$, y(0) = 4, $y'(0) = -3$.

8. Воронка имеет форму конуса радиуса R=6 см и высоты H=10 см, обращенного вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие диаметра 0,5 см, сделанное в вершине конуса? Принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной 0,6$\sqrt{2gh}$, где g =10 м/сек^2- ускорение силы тяжести, h- высота уровня воды над отверстием.

ЛИТЕРАТУРА:

1.Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Удм. ГУ. 2000.

2.Манзон Б.М. Maple 5 Power Edition. Москва: Информационно-издательский дом «Филин», 1998.

3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Выш. шк., 1974.

4. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учебное пособие, 7-е изд., дополненное. – СПб.: Издательство «Лань», 2002.

5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука,1980.

6. Федорюк М.В.Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1980.

7. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2014.

8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.

9. Эльсгольц Л.Э.Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Книга по требованию, 2012.