«РОССИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.И.ПИРОГОВА»

Медико – биологический факультет

Кафедра высшей математики МБФ

Дисциплина:
Математический анализ.

Раздел 1. Элементы аналитической геометрии, высшей и линейной алгебры.
(5 тем)

Тема: Комплексные числа

Методические разработки для студентов.

2012

Методические материалы к практическим занятиям для студентов.

Дисциплина: **Математический анализ.**
Тема: **Комплексные числа. Многочлены**

Учебные элементы темы.

1. Комплексные числа и действия над ними. Определение, свойства, операции на ними. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Формула Муавра. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера.

2. Многочлены. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на множители. Теорема Безу. Разложение дробно-рациональной функции на сумму простых дробей.

Литература для самостоятельного изучения.

1.Сборник задач по математике (для втузов). Под ред. А.В Ефимова , Б.П.Демидовича, 1993г. Гл1. Стр.39.
2.И.Н.Коновалова и др. Комплексные числа и их приложения.. Учебное пособие Кафедра Высшей математики МБФ, ГОУ ВПО РГМУ Росздрава 2007 г.
3. Письменный Д.Т. Лекции по высшей математике. , стр 285.
4. Задачи для обязательного решения дома представлены в конце методички.

Вопросы для самостоятельной подготовки по теме
«Комплексные числа»

1. Сформулировать основные определения комплексного числа и формы представления.
2. Как записывается комплексное число в алгебраической (тригонометрической) форме и по каким правилам проводятся арифметические операции над ними
3. Что означает в определении комплексного числа фраза «упорядоченная пара действительных чисел»?
4. 3. Какое из этих чисел называется «действительной частью Re *z*», какое «мнимой Imz»?
5. В каком случае комплексное число является обычным действительным числом?
6. При каких условиях считается , что два комплексных числа равны?
7. По каким правилам осуществляются действия и находятся: сумма, разность, произведение и частное двух комплексных чисел?
8. Какое комплексное число называется сопряженным к заданному и какими свойствами оно обладает?
9. Что называют «мнимой единицей» , как ее обозначают, и что получается при возведении ее в старшую степень ?
10. Что называют комплексной плоскостью, действительной и мнимой осями и как изображается комплексное число на комплексной плоскости?
11. Что называют «модулем» и «аргументом» комплексного числа? Каковы их возможные значения для множества точек комплексной плоскости?
12. В каких пределах значений находится «главное значение аргумента комплексного числа?

13. Запишите комплексное число в алгебраической и тригонометрической формах, а также основные соотношения связывающие их.
14. По каким правилам осуществляются действия над комплексными числами в тригонометрической форме: произведение, возведение в степень, деление?
15. Какой вид имеет формула Муавра при возведении комплексного числа в натуральную степень?
16. Что называют « корнем n- степени из комплексного числа» ?
17. Сколько возможных значений имеет корень степени n=5 из комплексного числа z= 1-2i ?
18. Как выглядит общая формула Муавра для извлечения корня n- степени из комплексного числа ?
19. Как выглядит показательная форма комплексного числа и записывается формула Эйлера?
20. С помощью формулы Эйлера запишите операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

§ 1. Теоретическое введение

Определение. **Комплексным числом z** называется ***упорядоченная пара чисел (a,b),*** *над множеством которых по определенным правилам можно производить следующие операции: сложение , умножение, деление, возведение в степень результаты которых также являются комплексными числами.*

Определение. **Алгебраической формой компле5ксного числа z** называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = Re\ z$), а b- **мнимой частью** ($b = Im\ z$).

Если $a = Re\ z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\ z = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

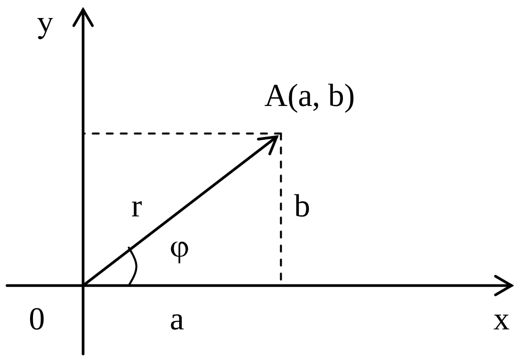
$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет **геометрическое истолкование**. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, (комплексной плоскости z) координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа *a*, а на оси OY – чисто мнимые-*b*.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой **тригонометрической форме.**

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$\boxed{z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина *r* называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\,z\,.$$

Из геометрических соображений видно:

$$\boxed{r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\,z = arctg\frac{b}{a};}$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\,z = -Arg\,\bar{z}.$$

Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) **Сложение и вычитание.**

$$\boxed{z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)}$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) **Умножение.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)}$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\; z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$\boxed{z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\boxed{z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}$$

В тригонометрической форме:

$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}$$

4) **Возведение в степень.**

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)},$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.**

(Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик)

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

Пример. Найти формулы sin2φ и cos2φ.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Получили известные формулы двойного угла.

5) **Извлечение корня из комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}; \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k; \qquad k \in Z.$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}$$

Таким образом, корень *n* – ой степени из комплексного числа имеет *n* различных значений.

Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z; \qquad z = x + iy.$

Можно показать, что функция *w* может быть записана в виде:

$$\boxed{w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)}$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Вывод этого уравнения будет рассмотрен позднее.

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

2) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $(e^z)^m = e^{mz}$; где *m* – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число (*x=0*), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\boxed{\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

Разложение многочлена на множители.

Определение. Функция вида $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ называется **целой рациональной** функцией от x.

Теорема Безу. (Этьенн Безу (1730 – 1783) – французский математик)
При делении многочлена f(x) на разность (x – a) получается остаток, равный f(a).

Доказательство. При делении многочлена *f(x)* на разность (*x – a)* частным будет многочлен $f_1(x)$ степени на единицу меньшей, чем *f(x)*, а остатком – постоянное число *R*.

$$f(x) = f_1(x)(x-a) + R$$

Переходя к пределу при $x \to a$, получаем *f(a) = R*.

Следствие. *Если, а – корень многочлена, т.е. f(a) = 0, то многочлен f(x) делится на (x – a) без остатка.*

Определение. Если уравнение имеет вид *P(x)* = 0, где *P(x)* – многочлен степени *n*, то это уравнение называется **алгебраическим** уравнением степени *n*.

Теорема. (Основная теорема алгебры) *Всякая целая рациональная функция f(x) имеет, по крайней мере, один корень, действительный или комплексный.*

Теорема. *Всякий многочлен n – ой степени разлагается на n линейных множителей вида (x – a) и множитель, равный коэффициенту при* x^n.

Теорема. *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.*

Если среди корней многочлена встречаются кратные корни, то разложение на множители имеет вид:

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}.$$

$$k_1 + k_2 + ... + k_m = n$$

k_i - кратность соответствующего корня.

Отсюда следует, что *любой многочлен n – ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).*

Это свойство имеет большое значение для решения алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений и играет важную роль в анализе функций.

Рассмотрим несколько примеров действий с комплексными числами.

Пример. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i; \quad z_2 = -7 - 2i$. Требуется а) найти значение выражения $\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$ в алгебраической форме, б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i} = \frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{-14-49i-4i+14}{4+49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

б) Число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ представим в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$$r = |z| = \sqrt{4+12} = 4; \qquad \varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -60^0$$

Тогда $z = 4(\cos 60^0 - i\sin 60^0)$.

Для нахождения z^{20} воспльзуемся формулой Муавра.

$$z^{20} = 4^{20}(\cos 1200^0 - i\sin 1200^0) = 4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi + 120^0) - i\sin(3\cdot 2\pi + 120^0)) =$$
$$= 4^{20}(\cos 120^0 - i\sin 120^0) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $w^3 + z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-60^0 + 2\pi k}{3}\right); \quad k \in Z.$$

§ 2. Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме

Алгебраической формой комплексного числа $z = (a, b)$.называется алгебраическое выражение вида

$$z = a + bi.$$

Арифметические операции над комплексными числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, записанными в алгебраической форме, осуществляются следующим образом.

1. Сумма (разность) комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\cdot i,$$

т.е. сложение (вычитание) осуществляются по правилу сложения многочленов с приведением подобных членов.

2. Произведение комплексных чисел

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\cdot i,$$

т.е. умножение производится по обычному правилу умножения многочленов, с учетом того, что $i^2 = 1$.

3. Деление двух комплексных чисел осуществляется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a^2 + b^2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2)\cdot i}{a^2 + b^2}, \quad (z_2 \neq 0),$$

т.е. деление осуществляется умножением делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Возведение в степень комплексных чисел определяется следующим образом:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \ldots z}_{n\ раз}.$$

Легко показать, что

$$z^n z^m = z^{n+m},$$

$$(z^n)^m = z^{nm},$$

$$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

Примеры.

1. Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -4 + 3i$.

$$z_1 + z_2 = (2 + (-1)\cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3)\, i = -2 + 2i.$$

2. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + 5i$.

$z_1 \cdot z_2 = (2-3i)\cdot(-4+5i) = 2\cdot(-4) + (-4)\cdot(-3i) + 2\cdot 5i - 3i\cdot 5i = 7+22i.$

3. Найти частное z от деления $z_1 = 3 - 2$ на $z_2 = 3 - i$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-2i)}{(3-i)} = \frac{(3-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{11-3i}{9+1} = \frac{11}{10} - \frac{3}{10}i.$$

4. Решить уравнение: $3x - (1-i)(x-yi) = 2+3i$, x и $y \in \mathbf{R}$.

$$3x - ((x-y) + (-x-y)i) = 2+3i$$

$$(2x+y) + (x+y)i = 2+3i.$$

В силу равенства комплексных чисел имеем:

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

откуда $x = -1$, $y = 4$.

5. Вычислить: i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1}, i^{-2}.

$i^2 = i \cdot i = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$

$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1.$

6. Вычислить z^{-3}, если $z = 1 - i$.

$$z^{-3} = (1-i)^{-3} = \frac{1}{(1-i)^3} = \frac{1}{1-3i+3i^2-i^3} = \frac{1}{-2-2i} = \frac{-2+2i}{(-2)^2+(-2)^2} =$$

$$= \frac{-2+2i}{8} = -0.25 + 0.25i.$$

7. Вычислить число z^{-1} обратное числу $z = 3 - i$.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3+i}{10} = 0.3 + 0.1i.$$

§ 3. Комплексные числа в тригонометрической форме

Комплексной плоскостью называется плоскость с декартовыми координатами (x, y), если каждой точке с координатами (a, b) поставлено в соответствие комплексное число $z = a + bi$. При этом ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой*. Тогда каждое комплексное число $a + bi$ геометрически изображается на плоскости как точка $A(a, b)$ или вектор $\overline{OA}$.

Следовательно, положение точки A (и, значит, комплексного числа z) можно задать длиной вектора | $\overline{OA}$ | = r и углом φ, образованным вектором | $\overline{OA}$ | с положительным направлением действительной оси. Длина вектора называется *модулем комплексного числа* и обозначается $|z|=r$, а угол φ называется *аргументом комплексного числа* и обозначается $\varphi = arg\ z$.

Ясно, что $|z| \geq 0$ и $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Из рис. 2 видно, что $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, а с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Из рис. 2 видно также, что если $z=a+bi$ и $\varphi=arg\ z$, то

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r}, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Если $z \in \mathbf{R}$ и $z > 0$, то $arg\ z = 0 + 2\pi k$;

если $z \in \mathbf{R}$ и $z < 0$, то $arg\ z = \pi + 2\pi k$;

если $z = 0$, $arg\ z$ не определен.

Главное значение аргумента определяется на отрезке $0 \leq arg\ z \leq 2\pi$,

либо $-\pi \leq arg\ z \leq \pi$.

Примеры:

1. Найти модуль комплексных чисел $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = -2-2i$.

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

2. Определить на комплексной плоскости области, задаваемые условиями:

1) $|z| = 5$; 2) $|z| \leq 6$; 3) $|z - (2+i)| \leq 3$; 4) $6 \leq |z - i| \leq 7$.

Решения и ответы:

1) $|z| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5^2$ - уравнение окружности радиусом 5 и с центром в начале координат.

2) Круг радиусом 6 с центром в начале координат.

3) Круг радиусом 3 с центром в точке $z_0 = 2 + i$.

4) Кольцо, ограниченное окружностями с радиусами 6 и 7 с центром в точке $z_0 = i$.

3. Найти модуль и аргумент чисел: 1) $z_1 = 1 + \sqrt{3}$; 2) $z_2 = -2 - 2i$.

1) $z_1 = 1 + \sqrt{3}$; $a = 1$, $b = \sqrt{3} \Rightarrow r_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^3} = \sqrt{4} = 2$,

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = \frac{a}{r} \Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi_1 = \frac{b}{r} \Rightarrow \sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi\kappa, \quad \kappa \in Z.$$

2) $z_2 = -2 - 2i$; $a = -2$, $b = -2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi_2 &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi_2 &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi\kappa, \quad \kappa \in Z.$$

Указание: при определении главного аргумента воспользуйтесь комплексной плоскостью.

Используя формулы $a = r\cos\varphi,\quad b = r\sin\varphi$ можно перейти от алгебраической формы записи комплексных чисел к *тригонометрической форме* (*формула Муавра*):

$$z = a + bi = r\cos\varphi + i\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Комплексные числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на целое число кратное 2π.

4. Записать числа в тригонометрической форме.

1) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 2) $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 3) $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 4) $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi_1 &= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}\\ \sin\varphi_1 &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}.$$

(За значение угла берем наименьшее неотрицательное из возможных значений аргумента.)

Таким образом: $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

2) $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_2 = 1$, $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$, $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

3) $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r_3 = 1$, $\varphi_3 = \frac{4\pi}{3}$, $z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$.

4) $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r_4 = 1$, $\varphi_4 = \frac{5\pi}{3}$, $z_4 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$.

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

1. Умножение.

При перемножении чисел z_1 и z_2, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

(Формула справедлива для любого конечного числа сомножителей.)

$$z_1 \ldots z_n = r_1 \ldots r_n\,(\cos(\varphi_1+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\ldots+\varphi_n)).$$

Если $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то последняя принимает вид

$$z^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

и называется *формулой Муавра*. Она показывает, что для возведения комплексного числа в натуральную степень нужно возвести в эту степень его модуль, а аргумент умножить на показатель степени.

Примеры.

1) Выполнить умножение:

$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),\quad z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}),\quad z_1\cdot z_2 = 6(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})) =$$
$$= 6(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}).$$

2) Вычислить: $(1+i)^{30}$.

$$1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),\quad (1+i)^{30} = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right)^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30}(\cos\frac{30\pi}{4} + i\sin\frac{30\pi}{4}) =$$
$$= 2^{15}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}).$$

2. **Деление.**

Если $z_1 = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),$$

т.е. модуль частного двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен частному модулей, а аргумент частного – разности аргументов.

Пример.

$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$. Найти частное.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3})) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}).$$

Формула Муавра ($\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi,\quad n\in N$) находит много применений. Так, например, если $n = 3$, то, возведя левую часть по формуле сокращенного умножения в куб, получим равенство

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \left(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\right) + \left(3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi\right)i.$$

Из равенства комплексных чисел и основного тригонометрического тождества получаем

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi.$$

С помощью формулы Муавра можно находить суммы тригонометрических функций.

Например, найдем сумму $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n-1)x,\quad x \neq \pi k,\ k\in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим сумму $S(x)=(\cos x+i\sin x)+(\cos 3x+i\sin 3x)+\ldots+(\cos(2n-1)x+i\sin(2n-1)x)$.

Из формулы Муавра имеем: $(\cos kx+i\sin kx)=(\cos x+i\sin x)^k$.

Таким образом, сумма S(x) примет вид:

$$S(x)=(\cos x+i\sin x)+(\cos x+i\sin x)^3+\ldots+(\cos x+i\sin x)^{2n-1}.$$

Эта сумма есть геометрическая прогрессия из n слагаемых с первым членом $b_1=\cos x+i\sin x$ и знаменателем прогрессии $q=(\cos x+i\sin x)^2$. По формуле $S=\dfrac{b_1-q^n b_1}{1-q}$ для суммы n членов геометрической прогрессии, имеем

$$S(x)=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos x+i\sin x)^{2n+1}}{1-(\cos x+i\sin x)^2}=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos(2n+1)x+i\sin(2n+1)x)}{1-\cos^2 x+\sin^2 x-2i\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{(\cos x-\cos(2n+1)x)+i(\sin x-\sin(2n+1)x)}{2\sin x(\sin x-i\cos x)}=$$

$$=\frac{((\cos x-\cos(2n+1)x)+i(\sin x-\sin(2n+1)x))(\sin x+i\cos x)}{2\sin x}=$$

$$=\frac{(\cos x-\cos(2n+1)x)\sin x-(\sin x-\sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x}+$$

$$+i\frac{((\sin x-\sin(2n+1)x)\sin x+(\cos x-\cos(2n+1)x)\cos x)}{2\sin x}.$$

$$\operatorname{Im}S(x)=\frac{\sin^2 x-(\sin(2n+1)x)\sin x+\cos^2 x-(\cos(2n+1)x)\cos x}{2\sin x}=\frac{1-\cos 2nx}{2\sin x}=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

$$\operatorname{Re}S(x)=\frac{\cos x\sin x-(\cos(2n+1)x)\sin x-\sin x\cos x+(\sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x}=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

В исходном выражении для $S(x)$ было:

$$\operatorname{Im}S(x)=\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x,$$

$$\operatorname{Re}S(x)=\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x.$$

Сравнивая мнимые и действительные части, получаем следующие формулы:

$$\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x},$$

$$\cos x+\cos 3x+\ldots\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

3. Извлечение корня из комплексного числа

Корнем *n*-ой степени, $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$, из числа z называется любое комплексное число u, для которого n-ая степень равна z:

$$\sqrt[n]{z}=u,\quad z=u^n.$$

В поле комплексных чисел справедлива следующая **теорема.**

Для любого $z\neq 0$ извлечение корня n-ой степени, $n\ge 2$, из числа z всегда возможно и имеет ровно n различных значений.

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Искомый корень n-ой степени обозначим

$$u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

По определению корня имеем $u^n = z$. Откуда следует, что

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Из равенства комплексных чисел получаем:

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

Так как $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r}$.

Таким образом, модуль комплексного числа u определяется как арифметический корень из действительного положительного числа r, а аргумент находят по формуле

$$\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Общая формула Муавра

$$u_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),\ k = \overline{0, n-1}.$$

Пример.

Вычислить $u = \sqrt[6]{\sqrt{3} - i}$.

Представим число $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3} - i = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)),$$

Поэтому согласно общей формуле Муавра

$$u_k = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{6},$$

где k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Таким образом, значения корней:

$$u_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{36} - i\sin\frac{\pi}{36}),$$

$$u_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 1}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 1}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{11\pi}{36}),$$

$$u_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 2}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 2}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}),$$

$$u_3 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 3}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 3}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{35\pi}{36} + i\sin\frac{35\pi}{36}),$$

$$u_4 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 4}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 4}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{47\pi}{36} + i\sin\frac{47\pi}{36}),$$

$$u_5 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 5}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 5}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{59\pi}{36} + i\sin\frac{59\pi}{36}).$$

Геометрически корни можно интерпретировать как числа, изображающие в комплексной плоскости вершины правильного n угольника (в рассмотренном примере – шестиугольника), вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{r}$ (в рассмотренном примере – радиусом $\sqrt[6]{2}$), с центром в начале координат.

Примеры.

Найти: 1) $\sqrt[4]{1}$, 2) $\sqrt[3]{i}$, 3) $\sqrt[3]{1}$.

Решение.

1) $u_k = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{0+2\pi k}{4} + i\sin\frac{0+2\pi k}{4}), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$

u_0 = cos0 + $i$sin0 = 1,

$$u_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$u_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$u_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

2) $u_k = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}) =$

$= \cos\frac{\pi+4\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+4\pi k}{6}$, k = 0, 1, 2.

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i),$$

$$u_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i),$$

$$u_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

3) $u_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}$, k = 0, 1, 2.

$$u_0 = \cos\frac{2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{2\pi\cdot 0}{3} = 1,$$

$$u_1 = \cos\frac{2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{2\pi\cdot 1}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$u_2 = \cos\frac{2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{2\pi\cdot 2}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§ 4. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

Помимо алгебраической и тригонометрической имеется еще *показательная форма записи комплексного числа,* которая широко используется в различных приложениях, в частности в электротехнике.

Пусть $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, зависит от действительной переменной φ.

Сопоставим взаимно однозначным образом каждому комплексному числу $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ комплексно показательное выражение $u(\varphi) = e^{i\varphi}$. С помощью операций дифференцирования можно показать, что эти выражения имеют одну и ту же логическую сущность, в связи с этим полагают по определению

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Эта формула называется формулой Эйлера и представляет собой определение комплексной показательной функции $e^{i\varphi}$, где φ – любое действительное число.

Пусть дано комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Сопоставляя это с предыдущей формулой, получаем

$$z = re^{i\varphi}.$$

Такая форма записи комплексного числа называется *показательной формой* комплексного числа.

В этой форме записи удобно осуществлять операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Соответствующие формулы записываются следующим образом.

Пусть $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$z_1\cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Примеры.

1. Найти показательную форму чисел:

а) $z_1 = 1 + i$; б) $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

Решение.

а) $r = |z_1| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z_1 = \frac{\pi}{4}, \quad z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

б) $r = |z_2| = 2, \qquad \varphi = \arg z_2 = \frac{7\pi}{6}, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{7\pi i}{6}}$.

2. Найти алгебраическую форму чисел:

а) $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, б) $z_2 = 3e^{-\frac{\pi i}{6}}$, в) $z_3 = e^{-3+4i}$.

Решение.

а) $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$,

б) $z_2 = 3e^{\frac{-\pi i}{6}} = 3(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)) = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$,

в) $z_3 = e^{-3+4i} = e^{-3} \cdot e^{4i} = e^{-3}(\cos 4 + i\sin 4) \approx 0.05(-0.65 - 0.76i) \approx -0.03 - 0.038i$.

3. Найти z_1z_2 и $\frac{z_1}{z_2}$, результат записать в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 3e^{\frac{2i}{3}}, \quad z_2 = 6e^{\frac{i}{6}}$; б) $z_1 = e^{3-7i}, \quad z_2 = e^{-4+5i}$.

Решение.

а) $z_1z_2 = 3e^{\frac{2i}{3}} \cdot 6e^{\frac{i}{6}} = 18e^{\frac{5i}{6}} = 18(\cos\frac{5}{6} + i\sin\frac{5}{6})$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2i}{3}}}{6e^{\frac{i}{6}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{2} + i\sin\frac{1}{2}),$$

б) $z_1z_2 = e^{3-7i} \cdot e^{-4+5i} = e^{-1-2i} = e^{-1}(\cos(-2) + i\sin(-2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{7-12i} = e^{7}(\cos 12 - i\sin 12).$$

4. Вычислить: а) z^4, б) $\sqrt[5]{z}$, где $z = 2e^{-3i}$.

Решение:

а) $z^4 = (2e^{-3i})^4 = 16e^{-12i} = 16(\cos 12 - i\sin 12) \approx 16(0.8438 + 0.5366\, i)$,

б) $\sqrt[5]{2e^{-3i}} = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi k}{5}i} = u_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$u_0 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3i}{5}} = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{3}{5} - i\sin\frac{3}{5}) \approx 0.95 - 0.65i,$$

$$u_1 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi}{5}i} \approx 0.91 + 0.70i,$$

$$u_2 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+4\pi}{5}i} \approx -0.39 + 1.08i,$$

$$u_3 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+6\pi}{5}i} \approx -1.15 - 0.03i,$$

$$u_4 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+8\pi}{5}i} \approx -0.33 - 1.10i.$$

Теория комплексных чисел может быть использована при решении геометрических задач на плоскости; и обратно, факты геометрического характера позволяют доказывать некоторые соотношения и тождества для комплексных чисел.

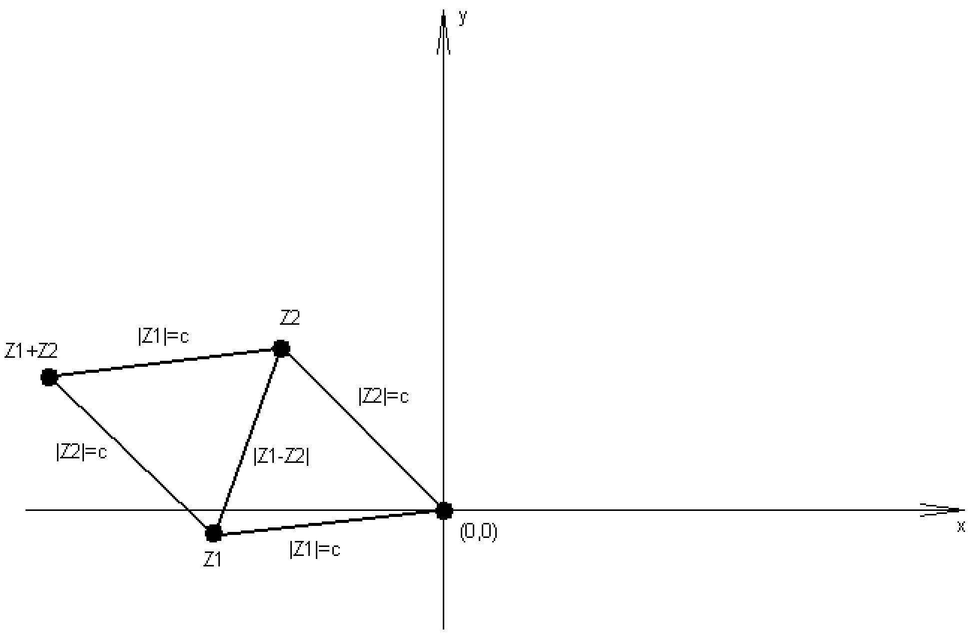
Примеры.

1. Пусть $|z_1| = |z_2| = c$. Доказать, что $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4c^2$.

Поскольку $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, то

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) =$$
$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 -$$
$$- (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 4c^2.$$

Геометрически этот факт означает, что сумма квадратов длин диагоналей ромба равна сумме квадратов длин всех его сторон.



Действительно, точки плоскости, соответствующие комплексным числам 0, z_1, z_2 и $z_1 + z_2$, являются вершинами ромба, для которого $|z_1|$ и $|z_2|$ – длины его сторон, а $|z_1 + z_2|$ и $|z_1 - z_2|$ – длины его диагоналей.

2. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 – различные комплексные числа и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$. Доказать, что $|z_1 - z_3||z_2 - z_4| = |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3|$.

Имеем:

$$|z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3| = |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| =$$
$$= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)|,$$

т. к. число $\dfrac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ вещественно и положительно (докажите это самостоятельно). Кроме того,

$$\left|(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_1-z_4)(z_2-z_3)\right| =$$

$$=\left|-z_1z_4-z_2z_3+z_1z_2+z_4z_3\right|=\left|(z_1-z_3)(z_2-z_4)\right|=\left|z_1-z_3\right|\left|z_2-z_4\right|.$$

Доказанное равенство известно в планиметрии как теорема Птолемея: произведение длин диагоналей выпуклого вписанного в окружность четырехугольника равно сумме парных произведений длин его противолежащих сторон.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

1) $(3 – 2i) + (5 + 3i)$;

2) $(1 + 2i) – (3 – i)$;

3) $3(2 – i)\cdot(1 – i)$;

4) $(1 + 3i)(–7 + 2i)$;

5) $(2 – i)^2$;

6) $(1 + 2i)^3$.

2. Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):

1) $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$;

2) $2x + (1 + i)(x + y)=7 +i$;

3) $(3 – y + x)(1 + i) + (x – y)(2 + i) = 6 – 3i$.

3. Вычислить:

1) i^{13}; 2) i^{65}; 3) $\left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2$;

4) $\dfrac{5}{1+2i}$; 5) $\dfrac{2i-3}{1+i}$; 6) $\dfrac{2+3i}{i}$;

7) $\dfrac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; 8) $\dfrac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\dfrac{4-i}{3+2i}$; 9) $(2-i)^2$.

4. Найти z^{-1}, если:

1) $z = 7 – 12i$; 2) $z = 3 + 4i$; 3) $z = –3 + 7i$; 4) $z = i$.

5. Вычислить:

1) $(1 + i\sqrt{3})^3(1 – i)^7$; 2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$; 3) $\dfrac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

6. Доказать, что $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}$; $\overline{-z_1}=-\overline{z_1}$.

7. Доказать, что если $z = a + bi,$ то $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$.

8. Построить точки, соответствующие комплексным числам:

-1; i; $-\sqrt{2}$; $-3i$; $2 - 3i$; $-4-2i$; $3+i$; $-6 + 2i$; $2 + 2i$; $-2 + 2i$; $-2 - 2i$.

9. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1 = -2 + i,\quad z_2 = 3 - i$; 2) $z_1 = -3,\quad z_2 = 4i$.

10. Изобразить геометрическое множество всех комплексных чисел $z = x + yi$, для которых:

1) $x = 2$; 2) $1 \le x \le 3$; 3) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; 4) $\operatorname{Im} z = 2\operatorname{Re} z$.

11. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

1) $z = 1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$; 3) $z = \sqrt{2}i$; 4) $z = 2$; 5) $z = -i$.

12. Указать на комплексной плоскости множества точек, соответствующие комплексным числам z, удовлетворяющие условиям:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \le 5$; 3) $1 \le |z| \le 2$; 4) $\arg z = 0$;

5) $\dfrac{\pi}{6} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$; 6) $|z - 1| = \dfrac{1}{3}$; 7) $|z - 3 + 2i| \le 2$.

13. Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:

1) $1,\ -1,\ i,\ -i$;

2) $z = 3 - 3i$;

3) $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}i}{2}$.

15. Даны числа

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8},\quad z_2 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12},\quad z_3 = \cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}.$$

Вычислить: 1) $z_1 z_2 z_3$; 2) $\dfrac{z_1}{z_2 z_3}$; 3) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$; 4) $\dfrac{z_1 z_3}{z_2}$.

17. Вычислить $|z|$ и $\arg z$, если $z = \dfrac{1 - i}{\sqrt{3} + i}$.

18. Упростить выражение $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$.

21. Вычислить корни и результат изобразить на комплексной плоскости.

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[4]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1 + i}$.

22. Выразить в радикалах корни из единицы степени 2, 3, 4, 6, 8.

23. Представить в показательной форе комплексные числа:

1) $-1 - i$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1 + i}$.

24. Найти тригонометрическую и алгебраическую форму для чисел:

1) $z=2e^{\frac{\pi i}{4}}$; 2) $z=4e^{\frac{\pi i}{2}}$; 3) $z=3e^{\pi i}$; 4) $z=e^{i}$.

25. Найти z_1z_2 и $\frac{z_1}{z_2}$, результат написать в алгебраической форме.

1) $z_1=1{,}5e^{0{,}7i}$; $z_2=0{,}7e^{1{,}7i}$,

2) $z_1=e^{-0{,}7+3i}$; $z_2=e^{1{,}5+2i}$.

26. Вычислить z^6 и $\sqrt[4]{z}$, результаты представить в алгебраической форме и изобразить их на плоскости.

1) $z=4.2e^{2{,}3i}$; 2) $z=0{,}4^{\pi i}$; 3) $z=3{,}5e^{5i}$; 4) $z=-16$.

27. Решить уравнения на множестве комплексных чисел и разложить многочлен на множители:

1. $x^2+x+1=0$.
2. $x^3+x^2+2x-4=0$.
3. $x^2+3x+4=0$.
4. $x^3-27=0$.
5. $x^3-4x^2-4x-5=0$.
6. $x^3+8x^2+15x+18=0$.
7. $x^3-6x+9=0$.
8. $x^3+6x+2=0$.
9. $x^3+24x-56=0$.
10. $x^3+3x^2-3x-1=0$.
11. $x^3+9x-26=0$.
12. $x^3-4x+2=0$.
13. $x^3+18x+15=0$.
14. $x^3+9x^2+18x+28=0$.
15. $x^3+6x^2+30x+25=0$.