ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ

**«РОССИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.И.ПИРОГОВА»**
МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

В.Н.Акимов, В.Я. Попов.

Интегрирование функции одной переменной.
Неопределенный интеграл

Учебное пособие

Москва 2011

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«РОССИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.И.ПИРОГОВА»
МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

В.Н.Акимов, В.Я. Попов.

Интегрирование функции одной переменной. Неопределенный интеграл

Учебное пособие

Утверждено на ЦКМС

ГОУ ВПО РГМУ Росздрава

Москва 2012

Рецензенты:
Воеводский В.С. , профессор кафедры медицинской и биологической физики московского медико-стоматологического университета
Фирсов Н.Н., профессор кафедры экспериментальной и теоретической физики МБФ ГОУ ВПО РГМУ Росздрава

Авторы:
Акимов В.Н. –заведующий кафедрой высшей математики МБФ РГМУ, профессор,
Попов В.Я..- профессор кафедры высшей математики МБФ РГМУ,

«Интегрирование функции одной переменной. Неопределенный интеграл»

Учебное пособие для студентов и преподавателей. - Акимов В.Н., Попов В.Я. – М.: ГОУ ВПО РГМУ , 2011, - 48 с.

Учебное пособие содержит основы теории определенного интеграла.. Приведены примеры решения типовых задач. Представлено большое количество задач для самостоятельного решения, в том числе варианты индивидуального расчетного задания содержащего ситуационные (прикладные) задачи .

Пособие предназначено для студентов младших курсов вузов изучающих дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной в рамках учебной программы.

ISBN 5-88458- 102 – 5 С ГОУ ВПО РГМУ Росздрава

«Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл»

Учебное пособие

Владимир Николаевич Акимов

Владимир Яковлевич Попов

Ответственный за выпуск редактор Н.Д.Пеленицына

Подписано в печать 25 августа 20010 г.
Формат 60x90 1/16 . Объем 3 п.л. Бумага офсетная . Печать офсетная . Тираж 200 экз. Цена договорная .

ГОУ ВПО РГМУ Росздрава
17997 , Москва, ул. Островитянова , д.1
Типография

Учебно-методическое пособие предназначено студентам медико-биологического факультета для оказания помощи в освоении учебного материала. В работе приведены определения основных понятий и формулировки теорем, рабочие формулы и математические выражения, даны практические рекомендации при разборе примеров с тем , чтобы облегчить усвоение материала и выполнение курсового расчетного задания.

Содержание.

Неопределенный интеграл.

Введение.

Ранее вы изучали первый раздел математического анализа под названием «Дифференциальное исчисление функции одной переменно». В этом разделе рассматривались задачи нахождения производной или дифференциала заданной функции на основании определений: задана $y=F(x)$ *найти* $f(x)$, *функцию являющуюся производной заданной* $f(x)=F(x)'$ или дифференциал $dF(x)=F(x)'dx=f(x)dx$. Необходимым для этого являлось условие дифференцируемости $F(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$.

В разделе «Интегральное исчисление функции одной переменной » ставится **обратная** задача: восстановить функцию, если известен ее дифференциал, т.е. **зная производную** $\boldsymbol{f(x)}$ и соответственно **дифференциал** $\boldsymbol{f(x)dx}$ **<u>найти</u>** такую функцию $\boldsymbol{F(x)}$, производная от которой будет равна $f(x)$:. $F(x)'=f(x)$, *а дифференциал.* $dF(x)=F(x)'dx=f(x)dx$.

Примером прикладной задачи служит наиболее простая в формулировке задача физики: пусть задана функция описывающая *изменение скорости движения* материальной точки $v=v(t)$ (скорость как функция времени) , надо найти функцию описывающую изменение положения (расстояние проходимое телом) со временем $S = S(t)$, причем по определению скорость есть производная от пути по времени $S(t)' = v(t)$, *а дифференциал* $dS = S(t)'dt = v(t)dt$ *как расстояние проходимое телом за интервал времени* dt,*в момент времени* t.

1. Основные понятия, теоремы, формулы интегрального исчисления.

Введем новые понятия .

<u>Определение:</u> Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Основная задача теории неопределенного интеграла – ***найти первообразную****.*

Свойства первообразной можно сформулировать в виде теоремы

<u>Теорема:</u> Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две любые первообразные для $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$F_1(x) - F_2(x)=C=const$$

Теорему легко доказать на основании определения первообразной (попробуйте самостоятельно).

Следствие: Первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Таким образом решение сформулированной выше задачи - достаточно найти одну первообразную и прибавить к ней *const. C.*

<u>Определение:</u> **Неопределенным интегралом от** функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется совокупность (множество) всех первообразных для функции $f(x)$, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

и обозначается символом: $\int f(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C;$

где $\boldsymbol{f(x)}$ –называется **подынтегральной функцией**, **x- переменной интегрирования.**

Условием существования неопределенного интеграла **от** функции *f(x)* на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x)+C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
5. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$
6. $\int f(x)dx = \frac{1}{a}\int f(x)d(ax+b);$

Определение: Интегрированием называется **операция** нахождения первообразной *F(x)* по заданной производной *f(x)* или дифференциалу *f(x)dx* . Интегрирование – действие обратное дифференцированию и правильность результата интегрирования можно проверить дифференцированием.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл, значит вспомнить таблицу производных , свойства неопределенного интеграла, свойства дифференциала, сообразить как выглядит первообразная. и записать совокупность первообразных

$$\int (x^3+5\sin x-1)dx = \int x^3dx + 5\int \sin xdx - \int dx = \frac{1}{4}x^4 - 5\cos x - x + C;$$

Интегрирование или нахождение неопределенного интеграла связано с нахождением первообразной функции. Для некоторых подынтегральных функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства, значения неопределенных интегралов большинства основных элементарных функций собраны в специальные **таблицы интегралов**, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем **таблицу основных интегралов**, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций. Таблица неопределенных интегралов является прямым следствием таблицы производных основных элементарных функций, правил дифференцирования и свойств дифференциала. Знание и умение пользоваться этими понятиями необходимо для освоения темы.

Таблица основных неопределенных интегралов

	Интеграл	Первообразная		Интеграл	Первообразная
1	$\int x^\alpha dx$	- $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq-1$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	10	$\int \cos xdx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	11	$\int \sin xdx$	-cosx + C

4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\| + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ + C
7	$\int tgxdx$	ln | cosx | +C	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
8	$\int ctgxdx$	ln | sinx | + C	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$

2. Основные методы интегрирования.

В интегральном исчислении нет универсальных способов интегрирования. Основной прием интегрирования - преобразование подынтегральной функции с целью привести ее к табличному виду. Поэтому таблицу интегралов надо помнить.

2.1.Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на таблице производных, на основании которой находится возможное значение первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием.

Необходимо запомнить : дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец, определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и неопределенных интегралов.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Метод внесения под знак дифференциала.

Для широкого круга неопределенных интегралов оказывается **удобным** для приведения к табличному виду **преобразовать дифференциал.**

Эта процедура отражена в позиции 6 перечня свойств неопределенного интеграла. Дифференциал не меняется если **к переменной интегрирования** прибавить или отнять постоянную величину, а если умножить переменную интегрирования, то на эту же величину необходимо разделить дифференциал

$$dx = d(x+c) \qquad dx = \frac{1}{a}d(ax+c)$$

Такая процедура , после переобозначения переменной интегрирования $ax+c=t$ приводит к табличным интегралам ,например:

Пример1:

$$\int \cos(2x+5)dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x+5)d(2x+5) = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(2x+5) + C$$

$$\int \frac{3}{4x-9}dx = \frac{3}{4}\int \frac{d(4x-9)}{4x-9} = \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{4}\ln|4x+9| + C$$

Внести под знак дифференциала можно элементарные функции и проверить результат с помощью дифференцирования. Рассмотрим следующие примеры этой операции:

$\cos x dx = d(\sin x)$ $\qquad \sin x dx = -d\cos x$ $\qquad x dx = d(x^2/2)$ $\qquad x^2 dx = d(x^3/3)$

$e^x dx = d(e^x)$ $\qquad e^{-x}dx = -d(e^{-x})$ $\qquad \frac{dx}{x} = d\ln|x|$ $\qquad \frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx)$

$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$ $\qquad \frac{dx}{\sin x^2} = -d(ctgx)$ $\qquad \frac{dx}{\cos x^2} = d(tgx)$

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$ $\qquad \frac{dx}{x^2} = -d(\frac{1}{x})$

Этот прием позволяет значительно упростить преобразование подынтегрального выражения для приведения его к табличному виду. В представленных ниже примерах в подынтегральной функции выделяется ее часть, которая при внесении этой части под знак интеграла позволяет увидеть табличный интеграл::

Пример 2.

$$\int \cos^2 x * \sin x dx = \int \cos^2 x d(\cos x) = |\cos x = t| = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Пример 3.

$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{} = \int \arcsin^3 x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \arcsin^3 x d(\arcsin x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\arcsin^4 x + C$$

Пример 4.

$$\int \frac{1}{(1+x^2)arctgx}dx = \int \frac{1}{arctgx}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{d(arctgx)}{arctgx} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|arctgx| + C$$

Пример 5.

$$\int x^3\sqrt{1+x^4}dx=\frac{1}{4}\int\sqrt{1+x^4}\,d(1+x^4)=\frac{1}{4}\int\sqrt{t}dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=\frac{1}{6}(1+x^4)\cdot\sqrt{1+x^4}+C$$

Обратите внимание на процедуру замены переменной интегрирования *dx→dt.* Это действие можно опустить и выполнять интегрирование в уме.

2.2 Метод подстановки (замены переменных).

Метод замены переменной обобщает рассмотренные выше примеры. Существует две формулы замены переменной в неопределенном интеграле:

Первая формула: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$, при которой переменная x принимается как дифференцируемая функция новой переменной t, и $dx = \varphi'(t)dt$ получается новый интеграл более простой для интегрирования:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Вторая формула: Если под знаком заданного интеграла можно выделить функцию $\varphi(x)$, *ее производную* $\varphi'(x)$ *и дифференциал* $\varphi'(x)dx$, такую, что после выбора в качестве новой переменной интегрирования $t = \varphi(x)$, новый интеграл приобретает более простой вид

$$\int f[\phi(x)]\phi'(x)dx=\int f(t)dt$$

Таким путем можно обосновать формулу

$$\int f(x)dx=\tfrac{1}{a}\int f(\tilde{o})d(ax+b)=\int f(t)dt$$

где $t=ax+b$, $x=(t-b)/a$ $dt=adx$ a, b – $const$

т.е. мы применили ранее рассмотренный прием интегрирования «введение новой функции под знак дифференциала» с последующей подстановкой новой переменной. .

Пример 6. Найти неопределенный интеграл $\int\sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Проведем замену переменной интегрирования $t = sinx$, т.к. $dt = cosxdx$, тогда:

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x dx=\int\sqrt{t}dt=\int t^{1/2}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+C=\frac{2}{3}\sin^{3/2}x+C.$$

Пример 7. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t=x^2+1;\quad dt=2xdx;\quad dx=\dfrac{dt}{2x};x=\sqrt{1-t}$ - обратная функция на промежутке строгой монотонности. Получаем:

$$\int x(x^2+1)^{3/2}dx.=\int t^{3/2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2}+C=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C;$$

Пример 8:

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x dx=\int\sqrt{\sin x}d\sin x=\int\sqrt{t}dt=\int t^{1/2}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+C=\frac{2}{3}\sin^{3/2}x+C.$$

Пример 9.

$$\int x(x^2+1)^{-1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

Пример 10:Найти неопределенный интеграл $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$. С целью упростить подынтегральное выражение, избавиться от корня, вспомним основное тригонометрическое тождество $cos^2x + sin^2x = 1$ откуда $cos^2x = 1-sin^2x$ *на основании этого делаем замену переменной*

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = 3\int x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,dx = \left| x = 3\sin t, dx = 3\cos t dt, t = \arcsin\frac{x}{3} \right| = 3\int 9\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 3\cos t dt =$$

$$81\int \sin^2 t\cdot\cos^2 t dt = \frac{81}{4}\int \sin^2 2t dt = \frac{81}{8}\int 2\sin^2 2t dt = \frac{81}{8}\int (1-\cos 4t)dt =$$

$$= \frac{81}{8}t - \frac{81}{8}\int \cos 4t dt = \frac{81}{8}t - \frac{81}{32}\sin 4t + C$$

Используя подстановки *sint=x/3, t=arcsin(x/3) и выражая*

$sin4t=2sin2tcos2t=4sintcost(cos^2t-sin^2t)=4(x/3)(\sqrt{1-x^2/3^2})(1-x^2/9 - x^2/9)$ после подстановки, находим первообразную.

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода специальной подстановки для различных типов функций.

2.3. Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения двух функций:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые функции от x.
В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$
Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \quad \text{или} \quad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям. Применение этого метода позволяет преобразовать подынтегральную функцию к более простой с помощью операций дифференцирования и интегрирования. При этом подынтегральное выражение представляют в виде произведения udv, *каждое из сомножителей которого в дальнейшем используется для получения нового, более простого интеграла содержащего* $v(x)$ *и* $du(x)$. Интегрирование начинается с выбора функции $u(x)$ и дифференциала $dv(x)$ *и реализуется по следующей схеме : выбираем* u→*находим* $du=u'dx$,; *выбираем* dv→*находим* $v=\int dv$. , полученные выражения подставляются в формулу.
Разберем **пример** , в котором метод интегрирования по частям применяется два раза.

Пример 10.

$$\int x^2 \sin x dx = \begin{Bmatrix} u = x^2; \quad dv = \sin x dx \\ \downarrow \\ du = 2x dx; \quad v = \int \sin x s x = -\cos x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример 11. $\int e^{2x} \cos x dx = \begin{Bmatrix} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{Bmatrix} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$

$$= \begin{Bmatrix} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x; \end{Bmatrix} = e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx\right] =$$

$$e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4\int \cos x e^{2x} dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным ,заменой переменной или введением функций под знак дифференциала, а также интегрированием по частям.

Пример 12.

$$\int x^2 (2x^3 + 1)^{11} dx = \frac{1}{6} \int (2x^3 + 1)^{11} d(2x^3 + 1) = \{2x^3 + 1 = t; \quad dt = d(2x^3 + 1);\}$$

$$= \frac{1}{6} \int t^{11} \cdot dt = \frac{1}{12} t^{12} \cdot \frac{1}{6} + C = \frac{t^{11}}{72} + C = \frac{(2x^3 + 1)^{12}}{72} + C$$

Пример 13.

$$\int \frac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{2 - x^2}\sqrt{2 + x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} =$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 2}\right| + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример 14.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx = \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

В этом же примере преобразуем дифференциал используя его свойства , внесем *cosx* под знак дифференциала

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx = \int \sin^{-3/2} x d\sin x = \{\sin x = t; \quad dt = d\sin x\} = \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C$$

Пример 15.

$$\int x^2 e^{5x} dx = \begin{Bmatrix} u = x^2; & dv = e^{5x} dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{Bmatrix} = \frac{1}{5} e^{5x} x^2 - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2xdx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int xe^{5x} dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = x; & dv = e^{5x} dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5} e^{5x}; \end{Bmatrix} = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx\right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25} \int e^{5x} dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

Пример 16

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \{x + 1 = t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

Пример 17.

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{1}{x^3} dx; \\ du = \dfrac{1}{x} dx; & v = -\dfrac{1}{2x^2}; \end{Bmatrix} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример 18

$$\int x \ln x dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \dfrac{1}{x} dx; & v = \dfrac{x^2}{2}; \end{Bmatrix} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

Пример 19

$$\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx=\left\{\sin 2x dx=-1/2d\cos 2x=\frac{-1}{2}dt;\quad t=\cos 2x;\right\}=-\frac{1}{2}\int e^{t}dt=-\frac{1}{2}e^{t}+C=-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+C$$

Пример 20.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left\{\sqrt{x}=t;\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right\}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C.$$

Пример 21.

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

2.4. Интегрирование элементарных дробей.

<u>Определение:</u> Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и дискриминант b^2 – 4ac <0.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t = ax + b.

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

II. $$\int\frac{dx}{(ax+b)^m}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^m}=-\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}}+C=-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}+C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.
Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot\, arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.
Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример 22.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \left\{\begin{matrix} u=6x-5; & du=6dx; \\ x=\frac{u+5}{6}; & \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}du = \frac{7}{3}\int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение (дискриминант) $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример 23.

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \left\{\begin{matrix} u=x+3; & du=dx; \\ x=u-3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}du = 5\int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$-18\int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

Пример 24.

.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \left\{\begin{matrix} u=x-3; & du=dx; \\ x=u+3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du = 3\int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+13\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s}\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\left\{\begin{aligned} &dv_1=\frac{udu}{(u^2+s)^n};\quad u_1=u;\quad du_1=du;\\ &v_1=\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}};\end{aligned}\right\}$

$$\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}=-\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}+\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{2n-3}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int\frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx=(4a)^n\int\frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx=\left\{\begin{aligned}&u=2ax+b;\quad du=2adx;\\ &x=\frac{u-b}{2a};\quad s=4ac-b^2;\end{aligned}\right\}=$$

$$=\frac{(4a)^n}{2a}\int\frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du=\frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}+\frac{2aN-Mb}{2a}\int\frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int\frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью n, а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример 25:

$$\int\frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx=\int\frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx=\left\{\begin{aligned}&u=x-2;\quad du=dx;\\ &x=u+2;\end{aligned}\right\}=\int\frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du=$$

$$=3\int\frac{udu}{(u^2+3)^2}+11\int\frac{du}{(u^2+3)^2}=\left\{\begin{aligned}&t=u^2+3;\\ &dt=2udu;\end{aligned}\right\}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2}+11\left[\frac{u}{3\cdot2(u^2+3)}+\frac{1}{3\cdot2}\int\frac{du}{u^2+3}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2t}+\frac{11u}{6(u^2+3)}+\frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}}+C=-\frac{3}{2(x^2-4x+7)}+\frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)}+\frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}}+C.$$

2.5. Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

<u>Теорема:</u> Если $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_l(x)}$ - правильная рациональная дробь ($m<l$), знаменатель $P_l(x)$ которой (напомним, что любой многочлен с действительными коэффициентами имеет корни действительные и комплексные, которые могут быть простые и кратные, число корней равно порядку многочлена) может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей
$P_l(x) = (x - a)^{\alpha}\dots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\dots(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на сумму простых дробей по следующей схеме:

$$\frac{Q_m(x)}{P_l(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\dots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\dots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\dots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\dots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины, общее число этих постоянных равно порядку многочлена.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример 26.

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$$

Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводим к общему знаменателю в правой части и из условия равенства дробей , приравниваем соответствующие числители

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

Выделяем в левой части коэффициенты при соответствующих степенях и из условия равенства многочленов

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов A,B,C,D

$$\begin{cases}A+B+C=9\\-4A-2B-6C+D=-30\\4A+4B+8C-6D=28\\-16A-8B+8D=-88\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=-30+4A+2B+54-6A-6B\\2A+2B+4C-3D=14\\2A+B-D=11\end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 2A + 2B + 36 - 4A - 4B - 72 + 6A + 12B = 14 \\ 2A + B - 24 + 2A + 4B = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 4A + 5B = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 50 - 10B + 5B = 35 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ B = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

Итого: $\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx =$

$$\int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{3}{x-4} dx + \int \frac{x+2}{x^2+4} dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + arctg\frac{x}{2} + C.$$

2.6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью универсальной подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тогда $x = 2arctgt;$ $\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2} dt = \int r(t) dt.$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример 27.

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2}=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример 28.

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]}=2\int\frac{dt}{t^2+2t+17}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2+16}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ если функция R является нечетной относительно cosx.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = sinx$.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}\cos x dx$$

Функция $\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}$ может содержать cosx только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно sinx.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(\sin x)\cos x dx=\int r(t)dt.$$

Пример 29.

$$\int\frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x}=\left\{\begin{matrix}\sin x=t\\ dt=\cos x dx\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{matrix}\right\}=\int\frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}-3\int\frac{dt}{t^2}+$$

$$+3\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *если*

функция R является нечетной относительно sinx.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $t = \cos x$. Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$

Пример 30.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \begin{Bmatrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{Bmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt = \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt =$$

$$= \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt = \int tdt + \int 2dt - 4\int \frac{tdt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \begin{Bmatrix} \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{-2}{t+2} + 1 \end{Bmatrix} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{dt}{t+2} - 4\int dt = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

функция R четная относительно sinx и cosx.

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка $t = tgx$. Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$

Пример 31.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 6tgx - 16}dx = \begin{Bmatrix} tgx = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx) = dt \end{Bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+6t-16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2-25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx+3-5}{tgx+3+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx-2}{tgx+8}\right| + C.$$

Интеграл произведения синусов и косинусов
различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Пример 32.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Пример 33.

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x -$$
$$-\frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример 34.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{dctg2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2ctg2x + C$$

Пример 35.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$
$$+ \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C.$$

Иногда применяются некоторые нестандартные приемы.

Пример 36.

$$\int \cos(\ln x) dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x; & du = \frac{1}{x}dx; \\ x = e^u; & dx = e^u du; \end{matrix} \right\} = \int e^u \cos u du = \left\{ \begin{matrix} p = \cos u; & dq = e^u du; \\ dp = -\sin u du; & q = e^u; \end{matrix} \right\} = e^u \cos u +$$
$$+ \int e^u \sin u du = \left\{ \begin{matrix} p = \sin u; & dq = e^u du; \\ dp = \cos u du; & q = e^u; \end{matrix} \right\} = e^u \cos u + e^u \sin u - \int e^u \cos u du;$$

Итого $\int e^u \cos u du = e^u(\cos u + \sin u) - \int e^u \cos u du$

Разберите самостоятельно следующие примеры:

$$\int e^u \cos u du = \frac{e^u}{2}(\cos u + \sin u) + C$$

$$\int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$$

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) + C;$$

2.7.Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ *где* n- *натуральное число.*

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; \qquad dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}, t\right)\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt = \int r(t)dt.$

Пример 37.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} = \left\{ \sqrt[4]{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-dx}{2t^3}; \right\} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2\int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$

$$= -2\int\left(t + \frac{t}{t-1}\right)dt = -2\int tdt - 2\int \frac{t}{t-1}dt = -t^2 - 2\int\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = -t^2 - 2t - 2\ln|t-1| + C =$$

$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x} - 1\right| + C.$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Проиллюстрируем это на примере.

Пример 38.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12}; \\ dx=12t^{11}dt; \end{array} \right\} = \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt =$$

$$=12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt + \int \frac{t^2}{t^2+1}dt \right) = 12\left(\int \left(t-\frac{t}{t^2+1} \right)dt + \int \left(1-\frac{1}{t^2+1} \right)dt \right) = 12\int tdt - 12\int \frac{tdt}{t^2+1} + 12\int dt -$$

$$-12\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2+12t-6\ln(t^2+1)-12arctgt+C = 6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)-$$

$$-12arctg\sqrt[12]{x-1}+C.$$

Интегрирование биноминальных дифференциалов.

<u>**Определение:**</u> **Биноминальным дифференциалом** называется выражение

$$x^m(a+bx^n)^p dx$$

где m, n, и p – рациональные числа.

Как было доказано академиком Чебышевым П.Л. (1821-1894), интеграл от биноминального дифференциала может быть выражен через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) Если p – целое число, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t=\sqrt[\lambda]{x}$, где λ - общий знаменатель m и n.
2) Если $\frac{m+1}{n}$ - целое число, то интеграл рационализируется подстановкой $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, где s – знаменатель числа p.
3) Если $\frac{m+1}{n}+p$ - целое число, то используется подстановка $t=\sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, где s – знаменатель числа p.

Однако, наибольшее практическое значение имеют интегралы от функций, рациональных относительно аргумента и квадратного корня из квадратного трехчлена.

На рассмотрении этих интегралов остановимся более подробно.

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Существует несколько способов интегрирования такого рода функций. В зависимости от вида выражения, стоящего под знаком радикала, предпочтительно применять тот или иной способ.

Как известно, квадратный трехчлен путем выделения полного квадрата может быть приведен к виду:

$$(\pm u^2 \pm m^2.)$$

Таким образом, интеграл приводится к одному из трех типов:

1) $\int R(u, \sqrt{m^2-u^2})du$;

2) $\int R(u, \sqrt{m^2+u^2})du$;

3) $\int R(u, \sqrt{u^2-m^2})du$;

1 способ. Тригонометрическая подстановка.

<u>Теорема:</u> Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{m^2-u^2})du$ подстановкой $u=m\sin t$ или $u=m\cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

Пример 39:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left\{\begin{array}{l}x=a\sin t;\\ dx=a\cos tdt\end{array}\right\}=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos tdt=\int a^2\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

<u>Теорема:</u> Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{m^2+u^2})du$ подстановкой $u=mtgt$ или $u=mctgt$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost.

Пример 40:

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}=\left\{\begin{array}{l}x=atgt;dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt;\\ \sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{a}{\cos t};\end{array}\right\}=\int\frac{a\cos tdt}{\cos^2 ta^4tg^4ta}=\int\frac{\cos^3 tdt}{a^4\sin^4 t}=\frac{1}{a^4}\int\frac{(1-\sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t}=$$

$$=-\frac{1}{3a^4\sin^3 t}+\frac{1}{a^4\sin t}+C=\left\{\sin t=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\}=-\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^4x^3}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4x}+C.$$

<u>Теорема:</u> Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{u^2-m^2})du$ подстановкой $u=\dfrac{1}{\sin t}$ или $u=\dfrac{1}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

Пример 41:

$$\int\frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}}=\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{\cos t};dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt;\\ \sqrt{x^2-4}=2tgt;\end{array}\right\}=\int\frac{2\sin t\cos tdt}{\cos^2 t\cdot 2\cdot 2^5tg^5t}=\frac{1}{32}\int ctg^4tdt=$$

$$=\frac{1}{32}\int ctg^2t\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\frac{1}{32}\int ctg^2td(ctgt)-\frac{1}{32}\int ctg^2tdt=-\frac{1}{96}ctg^3t-\frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{96}ctg^3t+\frac{1}{32}ctgt+\frac{t}{32}+C=\left\{ctgt=\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right\}=-\frac{1}{12(x^2-4)^{3/2}}+\frac{1}{16\sqrt{x^2-4}}+$$

$$+\frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x}+C.$$

2 способ. Подстановки Эйлера. (1707-1783)

1) Если a>0, то интеграл вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$.

2) Если a<0 и c>0, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$.

3) Если a<0 , а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1)$.

Отметим, что подстановки Эйлера неудобны для практического использования, т.к. даже при несложных подынтегральных функциях приводят к весьма громоздким вычислениям. Эти подстановки представляют скорее теоретический интерес.

3 способ. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

$$I.\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; \qquad II.\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}dx; \qquad III.\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

где P(x) – многочлен, n – натуральное число.

Причем интегралы II и III типов могут быть легко приведены к виду интеграла I типа.

Далее делается следующее преобразование:

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

в этом выражении Q(x)- некоторый многочлен, степень которого ниже степени многочлена P(x), а λ - некоторая постоянная величина.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена Q(x), степень которого ниже степени многочлена P(x), дифференцируют обе части полученного выражения, затем умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, определяют λ и коэффициенты многочлена Q(x).

Данный метод выгодно применять, если степень многочлена P(x) больше единицы. В противном случае можно успешно использовать методы интегрирования рациональных дробей, рассмотренные выше, т.к. линейная функция является производной подкоренного выражения.

Пример 42.

$$\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Теперь продифференцируем полученное выражение, умножим на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5} + \frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{x^2-2x+5}}(x-1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

$$(2Ax+B)(x^2-2x+5) + (Ax^2+Bx+C)(x-1) + \lambda = 3x^3-7x^2+1$$

$$2Ax^3-4Ax^2+10Ax+Bx^2-2Bx+5B+Ax^3+Bx^2+Cx-Ax^2-Bx-C+\lambda = 3x^3-7x^2+1$$

$$3Ax^3-(5A-2B)x^2+(10A-3B+C)x+5B-C+\lambda = 3x^3-7x^2+1$$

$$\begin{cases} A=1 \\ 5A-2B=7 \\ 10A-3B+C=0 \\ 5B-C+\lambda=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-13 \\ \lambda=-7 \end{cases}$$

Итого $\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$

$=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C.$

Пример 43.

$$\int (4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\int \frac{(4x^2-6x)(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}dx=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+3}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\frac{4x^4-6x^3+12x^2-18x}{\sqrt{x^2+3}}=(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+3}+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+3)+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=3Ax^4+2Bx^3+Cx^2+9Ax^2+6Bx+3C+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=4Ax^4+3Bx^3+(2C+9A)x^2+(6B+D)x+3C+\lambda$$

$$A=1;\quad B=-2;\quad C=3/2;\quad D=-6;\quad \lambda=-9/2;$$

$$\int (4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\left(x^3-2x^2+\frac{3}{2}x-6\right)\sqrt{x^2+3}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C.$$

Пример 44.

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{aligned} &x=\frac{1}{v}; \\ &dx=-\frac{dv}{v^2} \end{aligned}\right\}=-\int \frac{v^3dv}{v^2\sqrt{\frac{1}{v^2}-1}}=-\int \frac{v^2dv}{\sqrt{1-v^2}}=(Av+B)\sqrt{1-v^2}+\lambda\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}=A\sqrt{1-v^2}-\frac{(Av+B)v}{\sqrt{1-v^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-v^2=A-Av^2-Av^2-Bv+\lambda$$

$$-v^2=-2Av^2-Bv+A+\lambda$$

$$A=1/2;\quad B=0;\quad \lambda=-1/2;$$

$$-\int \frac{v^2dv}{\sqrt{1-v^2}}=\frac{v\sqrt{1-v^2}}{2}-\frac{1}{2}\arcsin v=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}-\arcsin\frac{1}{x}\right)+C$$

Второй способ решения того же самого примера.

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{aligned} &x=\frac{1}{\cos t};dx=\frac{tgt}{\cos t}dt; \\ &\sqrt{x^2-1}=tgt; \end{aligned}\right\}=\int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}\cdot tgt}dt=\int \frac{\sin t\cos^4 t}{\cos^2 t\sin t}dt=\int \cos^2 tdt=$$

$$=\int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\left\{\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)+C.$$

С учетом того, что функции arcsin и arccos связаны соотношением $\arcsin\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{x}$, а постоянная интегрирования С – произвольное число, ответы, полученные различными методами, совпадают.

Как видно, при интегрировании иррациональных функций возможно применять различные рассмотренные выше приемы. Выбор метода интегрирования обуславливается в основном наибольшим удобством, очевидностью применения того или иного метода, а также сложностью вычислений и преобразований.

Пример 45.

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ dx = \cos t dt; \\ \cos t = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tgt + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

2.8. Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, где P(x)- многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются **эллиптическими.**

Если степень многочлена P(x) выше четвертой, то интеграл называется **ультраэллиптическим.**

Если все – таки интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется **псевдоэллиптическим.**

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

1) $\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840))
2) $\int \sin x^2 dx;\ \int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) - теория волновой оптики и др.)
3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм
4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ - приводится к интегральному логарифму
5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус
6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус

3. Варианты курсового расчетного задания.

Задание выполняется с соблюдением следующих требований :

1. Каждый студент выполняет свой вариант самостоятельно в указанные преподавателем сроки..
2. Выполнение задачи сопровождается комментарием с указанием приема, метода , формулы с помощью которых находится решение .
3. Задание оформляется в отдельной тетрадке, аккуратно, грамотно.
4. Положительная оценка за выполненную работу означает, что работа принята и результат будет учтен при выставлении зачета и сдачи экзамена.

Пример варианта индивидуальных заданий по теме «Неопределенный интеграл»

Вариант № 1

Найти неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$,

2) $\int (x-2)e^{-\frac{\pi}{3}}dx$,

3) $\int \frac{arctg(2x)dx}{(1+4x^2)}$,

4) $\int (x-1)\,\boldsymbol{ln}(x)dx$,

5) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2+1}}$,

6) $\int \sin(3x)\cos(5x)dx$.

7) $\int \frac{xdx}{1-x^4}$,

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$,

Список использованной литературы.

1. Шипачев В.С. Основы высшей математики. М. 2005 г.
2. Фихтенгольц . Основыф высшей математики. М. 1999 г.
3. Сборник задач по высшей математике (для втузов) Под редакцией А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. М 2003г.
4. Д.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1, М.2003.