

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ЗДРАВООХРАНЕНИЮ И СОЦИАЛЬНОМУ
РАЗВИТИЮ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Н.Акимов, В.Я. Попов.

**Интегрирование функции одной переменной.
Определенный интеграл**

Учебное пособие

Москва 2010

В.Н.Акимов, В.Я. Попов.

Интегральное исчисление функции одной переменной.
Определенный интеграл

Учебное пособие

Утверждено на ЦКМС
ГОУ ВПО РГМУ Росздрава

Москва 2010

Рецензенты:
Цыбин С.С., профессор московского инженерно-физического университета
Фирсов Н.Н., профессор кафедры экспериментальной и теоретической физики
МБФ ГОУ ВПО РГМУ Росздрава

Авторы:
Акимов В.Н. –заведующий кафедрой высшей математики МБФ РГМУ, профессор,
Попов В.Я.- профессор кафедры высшей математики МБФ РГМУ,

«Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный интеграл»

Учебное пособие для студентов и преподавателей.- М. РГМУ. Акимов В.Н.,
Попов В.Я. – М.: ГОУ ВПО РГМУ , 2007, - 48 с.

Учебное пособие содержит основы теории определенного интеграла. Приведены примеры решения типовых задач. Представлено большое количество задач для самостоятельного решения, в том числе варианты индивидуального расчетного задания содержащего ситуационные (прикладные) задачи .
Пособие предназначено для студентов младших курсов вузов изучающих дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной в рамках учебной программы.

Учебно-методическое пособие предназначено студентам медико-биологического факультета для оказания помощи в освоении учебного материала и теоретическую часть учебного материала можно рассматривать как конспект лекций. В работе приведены определения основных понятий и формулировки теорем, рабочие формулы и математические выражения, даны практические рекомендации при разборе примеров с тем , чтобы облегчить усвоение материала и выполнение курсового расчетного задания.

«Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный интеграл»

Учебное пособие

Владимир Николаевич Акимов

Владимир Яковлевич Попов

Ответственный за выпуск редактор Н.Д.Пеленицына

Подписано в печать 25 августа 20010 г.

Формат 60х90 1/16 . Объем 3 п.л. Бумага офсетная . Печать офсетная . Тираж 200 экз. Цена договорная .

ГОУ ВПО РГМУ Росздрава
17997 , Москва, ул. Островитянова , д.1
Типография

Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла и процедуры вычисления - интегрирования встречаются в самых различных задачах физики, химии, техники, математической биологии, теории вероятностей и математической статистики. К необходимости использовать определенный интеграл приводят задачи вычисления площади криволинейной области, длины дуги, объема и массы тела с переменной плотностью, пути пройденного движущимся телом, работы переменной силы, потенциала электрического поля и многое другое.

Общим для этого типа задач является подход к решению задачи: большое можно представить как сумма маленького, площадь плоской области можно представить как сумму площадей прямоугольников, на которые мысленно разбивается область, объем как сумма объемов кусочков, масса тела как сумма масс частей и т.д.

Математика обобщает прикладные задачи заменяя физические, геометрические величины абстрактными математическими понятиями (функция, промежуток или область интегрирования), исследует условия интегрируемости и предлагает практические рекомендации к использованию определенного интеграла.

Теория определенного интеграла является составной частью раздела математического анализа - интегральное исчисление функции одной переменной.

Содержание.

1. Основные понятия , определения и теоремы.
 - 1.1. Интегральные суммы.
 - 1.2. Суммы Дарбу.
 - 1.3. Определение и основные свойства определенного интеграла.
2. Вычисление определенного интеграла.
 - 2.1 Интеграл с переменным верхним пределом.

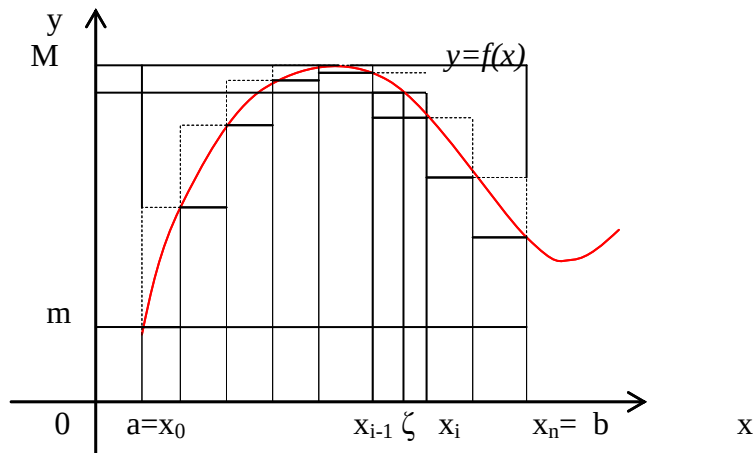
Формула Ньютона-Лейбница.
 - 2.2 Замена переменной в определенном интеграле.
 - 2.3 Интегрирование по частям.
 - 2.4 Интегрирование четной и нечетной функции по симметричному промежутку.
3. Несобственные интегралы первого и второго рода.
4. Варианты примеров и задач для решения в классе и работы дома.
5. Прикладные задачи для определенного интеграла .
6. Варианты курсового задания.

Определенный интеграл.

1. Основные понятия и определения .

1.1 Интегральная сумма.

В основе определения понятия **определенный интеграл** лежит понятие **интегральная сумма**. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Будем называть криволинейной трапецией фигуру ограниченную графиком функции, осью Ox и вертикальными прямыми, проходящими через концы отрезка (Рис.1). Обозначим площадь криволинейной трапеции S .



Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n=b$$

Тогда длина каждой части (кусочка) $\Delta x_i : x_1-x_0 = \Delta x_1, x_2-x_1 = \Delta x_2, \dots, x_i-x_{i-1} = \Delta x_i, \dots,$

$$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n;$$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ξ_i .

$$x_0 < \xi_1 < x_1, \quad x_1 < \xi_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i, \dots, \quad x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

Геометрически эта сумма изображается (представляется) ступенчатой фигурой, построенной из прямоугольников, и определяет площадь этой ступенчатой фигуры.

В теории определенного интеграла большую роль играют суммы Дарбу. Они вводятся для выяснения условий интегрируемости $f(x)$ и существования определенного интеграла.

1.2.Суммы Дарбу.

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$

На каждом из полученных ранее отрезков Δx_i найдем наименьшее m_i и наибольшее M_i значение функции.

$$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1; \quad [x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2; \quad \dots, [x_{i-1}, x_i] \rightarrow m_i, M_i; \dots, [x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n.$$

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i \quad (2)$$

$$\bar{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i \quad (2)$$

Сумма $\underline{S}_n$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\bar{S}_n$ – **верхней интегральной суммой Дарбу**.

(укажите на рисунке геометрическую интерпретацию данного неравенства понимая, что правая часть неравенства равна площади описанного вокруг криволинейной трапеции прямоугольника, а левая часть – вписанного).

Теперь для любого маленького отрезка разбиения Δx_i можно записать:

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i,$$

что после суммирования дает систему неравенств

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \bar{S}_n \quad (4)$$

Геометрически эта система неравенств представляется следующим образом: график функции $f(x)$, соответственно криволинейная трапеция, ограничены сверху описанной ломаной линией (площадь которой $\bar{S}_n$), а снизу – вписанной ломаной (площадью $\underline{S}_n$).

Обозначим $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ – длина наибольшего отрезка разбиения.

Если $\lambda \rightarrow 0$, то очевидно число отрезков n разбиения отрезка $[a, b]$ должно стремиться к бесконечности, и наоборот. Тогда для интегральной суммы $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, можно говорить о существовании предела - числа I , что приводит к равенству

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I \quad (5)$$

1.3.Определенный интеграл. Свойства, оценки.

Определение: Определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральных сумм, если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$ и произвольном выборе точек ξ_i для данного разбиения интегральная сумма

$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ стремится к пределу I .

Обозначение определенного интеграла: $I = \int_a^b f(x) dx$.

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок или промежуток интегрирования.

Определение: Если для функции $f(x)$ существует предел интегральных сумм и он конечный (число)

$$I = \lim_{\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \quad (6)$$

то функция называется **интегрируемой** на отрезке $[a, b]$.

Также верны утверждения: $I = \lim_{\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad (7)$

$$I = \lim_{\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad (7)$$

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости): Функция $f(x)$ **ограниченная** на $[a, b]$ интегрируема.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости): Если функция $f(x)$ **непрерывна** или **кусочно-непрерывна** на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0$$

2. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ - перестановка пределов интегрирования приводит к изменению знака :

$$3. \int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx;$$

$$4. \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

5. Если $f(x) \leq \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$.

6. **Оценки определенного интеграла** : если $m < M$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (8)$$

7. **Теорема 3 (о среднем значении функции на отрезке).** Если функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке **существует точка $x=c$, $a < c < b$** , такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 6:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то (по свойству непрерывных на отрезке функций) она принимает на этом отрезке все значения от m до M . Другими словами, существует такое число $c \in [a, b]$, что если принять

$\mu = f(c)$, то $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu$ тогда $\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$. Теорема доказана.

Определение :Средним значением функции на отрезке $[a, b]$ называется число μ :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu \quad (9)$$

Геометрическая интерпретация – формулы(8) и (9) определяют равенство площадей криволинейной трапеции и прямоугольника высотой $\mu = f(c)$ опирающихся на основание длиной $(b-a)$.

8) Для заданного промежутка интегрирования $[a, b]$ и c произвольной точки c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

Пример1: Вычислить определенный интеграл от функции $f(x)=4x+3$по отрезку $[1,5]$ пользуясь только определением. Найти среднее значение и провести оценку интеграла на основании введенных определений

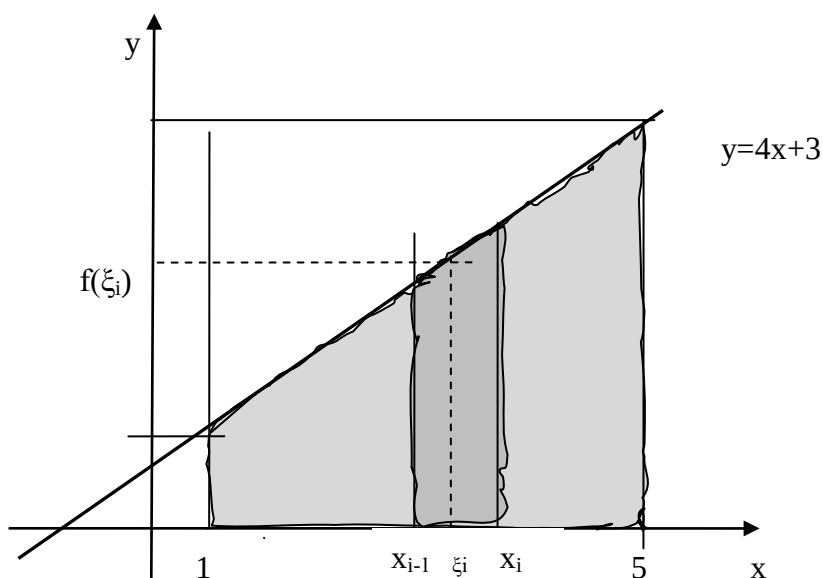


Рис. 2

Решение : Интегрирование начинаем с построения интегральной суммы для заданной функции по промежутку интегрирования .

Первый шаг:1) Разбиение отрезка интегрирования. Проведем разбиение отрезка $[1;5]$ на n равных частей длиной, тогда длина образовавшихся «кусочков»

$$\Delta x_i = (b-a)/n = (5-1)/n = 4/n.$$

2) Запишем координаты концов кусочков (частей) разбиения Δx_i , соответственно :

для «кусочка» $[x_{i-1}, x_i]$: $x_{i-1} = a + (i-1) \Delta x_i = 1 + (i-1)(4/n)$;

$$x_i = a + i \Delta x_i = 1 + i(4/n) .$$

3) Выберем точку ξ_i внутри Δx_i и найдем ее координаты, например ,

в середине отрезка $\xi_i = 1 + (i-1)(4/n) + 4/2n$

либо на его концах левом $\xi_i = x_{i-1}$ или правом $\xi_i = x_i$.

4) Теперь найдем значения функции в выбранных точках и построим интегральную сумму. Для ξ_i в середине отрезка

$$f(\xi_i) = 4\left(1 + (i-1)\left(\frac{4}{n}\right) + \frac{4}{2n}\right) + 3 = 4 + 16i/n - 16/n + 8/n + 3 = 7 + 16i/n - 8/n$$

составляем сумму

$$\begin{aligned} S_n &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \{7 + 16i/n - 8/n\} \frac{4}{n} = \\ &= \sum_{i=1}^n 28/n + \sum_{i=1}^n 64i/n - \sum_{i=1}^n 32/n^2 = 28 + 64/n \left(\sum_{i=1}^n i\right) - 32/n = 28 + \{(64/n)(1+n)/2\}n \\ &= 28 + \{(64/n)(1+n)/2\}n - 32/n = 28 + 32 + 32n - 32n = 60 \end{aligned}$$

Функция $f(x)$ монотонно возрастает, поэтому на левом конце отрезка x_{i-1} функция принимает значение $m_i = f(x_{i-1})$ - наименьшее значение а на правом в точке x_i : $\xi_i = x_i$ значение M_i . Подставляя и вычисляя находим, верхнюю и нижнюю суммы

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^n [4(1 + (i-1)(\frac{4}{n}) + 3)](\frac{4}{n}) = 60$$

$$\bar{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^n [4(1 + i(\frac{4}{n})) + 3](\frac{4}{n}) = 60$$

Вычисляя предел найденных сумм при $n \rightarrow \infty$ ($\max \Delta x_i \rightarrow 0$) находим значение определенного интеграла $I=60$. При этом учитываем, что сумма вида

$\sum_{i=1}^n 4i = 4 \sum_{i=1}^n i = 4(1+2+3+4+\dots+n) = 4(n+1)n/2$ -образует арифметическую прогрессию и сумма арифметической прогрессии находится по известной форме.

Обратите внимание, интегральная сумма и суммы Дарбу имеют в пределе одинаковые значения.

Значение определенного интеграла геометрически определяет площадь криволинейной (в нашем случае прямолинейной) трапеции.

Оценка интеграла по формуле (8) где $M=23$, $m=7$ дает систему неравенств

$$7 * 4 < \int_1^5 (4x + 3) dx < 23 * 4,$$

которая на графике определяет отношение площадей вписанного прямоугольника высоты $m=7$, криволинейной трапеции и описанного прямоугольника высоты $M=23$ опирающихся на отрезок длиной 4.

Среднее значение функции по отрезку согласно формуле (9) равно

$$\frac{1}{5-1} \int_1^5 (4x + 3) dx = 15$$

и определяет высоту такого прямоугольника, основанием которого служит отрезок $[1,5]$, а площадь равна площади трапеции.

2.Вычисление определенного интеграла.

Понятие «определенный интеграл» было введено в математике для решения определенного класса задач, приводящих к необходимости вычисления интегральных сумм и их пределов. Однако, в дальнейшем была установлена **связь между определенным и неопределенным интегралами.**

2.1 Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел $a=\text{const}$ фиксирован, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел (его в этом случае можно рассматривать как переменную величину и обозначить $b=x$), то изменяется как функция переменной x - верхнего предела и значение интеграла.

Обозначим
$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (10)$$

Определение: Функция $\Phi(x)$ называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

В формуле (10) переменная интегрирования под знаком интеграла изменена на букву t для удобства, хотя она сохраняет все те же значения переменной x .

Теорема 4(о свойстве интеграла с переменным верхним пределом) $\Phi(x)$:
Производная функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу x равна значению подынтегральной функции взятой в верхнем пределе.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \text{ или } \frac{d}{dx} \Phi(x) = f(x) \quad (11)$$

(Обращаем внимание на замену обозначения переменной под знаком интеграла вместо x стоит t , что не влияет на его смысл и значение)

В этом случае $\Phi(x)$ можно рассматривать как первообразную подынтегральной функции (вспомнить определение первообразной и неопределенного интеграла).

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема 5: Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке **первообразная**, а значит, **существует неопределенный интеграл**.

Теорема: (Теорема-формула Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (12)$$

это выражение известно под названием **формулы Ньютона – Лейбница**.

Доказательство: Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функции $f(x)$. Но т.к. функция $f(x)$ может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то произвольное постоянное число C , то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

Это равенство справедливо для любого x на $[a, b]$, тогда при $x=a$ получаем, после подстановки, следующие соотношения:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C, \rightarrow 0 = F(a) + C, \rightarrow C = -F(a)$$

Следовательно

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Тогда при $x = b$:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Заменив переменную t на переменную x , что не меняет смысла выражения, получаем формулу Ньютона – Лейбница (12):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Формула Ньютона – Лейбница определяет **основной подход к вычислению определенных интегралов** – сначала надо найти первообразную подынтегральной функции, а затем подставить пределы и вычислить разность между значениями функции...

Что касается **приемов** вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены при нахождении **неопределенных интегралов (первообразной)**. Точно так же применяются знакомые методы: подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов необходимо учитывать преобразование не только подынтегральной функции, но и пределов интегрирования. Заменяя переменную интегрирования (вводя новую функцию), необходимо не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b \sin(x)dx$.

Решение: Так как для функции $f(x)=\sin(x)$ функция $F(x)=-\cos(x)$ является первообразной, то, применяя формулу Ньютона – Лейбница, вычисляем данный определенный интеграл:

$$\int_a^b \sin(x)dx = -\cos(x) \Big|_a^b = -(\cos(b) - \cos(a)) = \cos(a) - \cos(b).$$

2.2. Замена переменной интегрирования в определенном интеграле .

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда если:

- 1) $\varphi(t)$ - дифференцируемая и $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$;
- 2) отрезок $[a, b]$ отображается на $[\alpha, \beta]$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (13)$$

Тогда $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл заменой переменной

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ 0 \leq x \leq 1 \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx$.

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{1+x} = t, \\ x = t^2 - 1, \\ dx = 2t dt, \\ \begin{array}{l} x=0, t=1, \\ x=3, t=2 \end{array} \end{array} \right\} = \int_1^2 (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t dt = 2 \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 7 \frac{11}{15}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция должна быть определена, непрерывна и дифференцируема на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример 5. Вычислим определенный интеграл двумя способами.

Очевидно $\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$, с другой стороны, если под знаком интеграла построить дробь,

в знаменателе ввести функцию тождественно равную единице и применить формально тригонометрическую подстановку, то получим другой результат

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \tan^2 x)} = \{ \tan x = t \} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная новая переменная $t = \tan x$ имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке $x = \pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

2.3. Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (14)$$

Вывод этой формулы аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x \cos(x) dx$.

$$\int_0^{2\pi} x \cos(x) dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} =$$

$$= x \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{2\pi} + \cos x \Big|_0^{2\pi} = [2\pi \cdot \sin(2\pi) - 0 \cdot \sin(0)] +$$

$$[2\pi \cdot \cos(2\pi) - 0 \cdot \cos(0)] = 0.$$

2.4. Интегрирование четной и нечетной функции по симметричному отрезку $[-a, a]$.

Отметим следующие полезные свойства определенного интеграла.

Если $f(x)$ четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Если $f(x)$ нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

3. Несобственные интегралы.

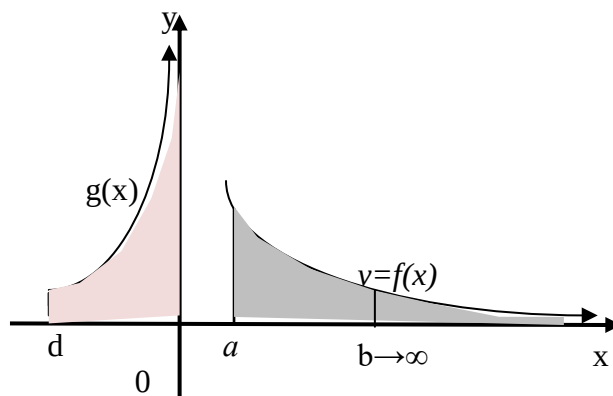
Несобственные интегралы обобщают понятие определенного интеграла для 2-х случаев, при которых нарушаются необходимые условия интегрируемости, а именно: 1) под интегралом **ограниченная функция $f(x)$ интегрируется**, по (полу-) **бесконечному промежутку** и 2) под интегралом **неограниченная функция $g(x)$ интегрируется по конечному промежутку**.

Геометрически несобственные интегралы определяют площадь полубесконечной трапеции (рис), ограниченной в первом случае: графиком функции и осью OX ; во втором случае графиком функции и осью OY по промежутку $[d, 0)$ (см. рис.).

В задаче «найти несобственный интеграл ...» решается проблема – какая по величине площадь криволинейной трапеции: **конечная или бесконечно большая**, что равносильно ответу на вопрос: **сходится или расходится несобственный интеграл**.

3.1 Несобственные интегралы первого рода

Пусть **убывающая** функция $f(x)$ определена и непрерывна на **полубесконечном** интервале $[a, \infty)$. Тогда она непрерывна на **любом** отрезке **конечной** длины $[a, b]$ ($b > a$) и следовательно интегрируема на нем (т.е. существует определенный интеграл и он может быть вычислен с помощью формулы Ньютона-Лейбница).



Определение: Несобственным интегралом 1-го рода от функции $f(x)$ на интервале $[a, \infty)$ называется предел от интеграла с переменным верхним пределом, когда последний (верхний предел) стремится к бесконечности $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$,

Вычислить несобственный интеграл 1-го рода, это значит выполнить следующую последовательность действий: 1) записать несобственный интеграл используя символ предела, 2) найти первообразную , 3) подставить пределы интегрирования и 4) найти предел полученного выражения:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (F(b) - F(a)) \quad (15)$$

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл **расходится**.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

Задачи связанные с несобственными интегралами 1-го рода **формулируются** следующим образом: **вычислить или установить сходимость** интеграла по полубесконечному промежутку (интервалу). При этом решить эту задачу можно двумя способами:

1) найти первообразную и ее предел согласно (15) или 2) если интеграл не берется или его поиск сложен, использовать **признаки сходимости**. В этом случае для ответа на вопрос задачи **привлекают для сравнения заведомо сходящиеся или расходящиеся** несобственные интегралы от **специально подобранных функций**

Пример 7. Вычислить или установить сходимость интеграл $\int_0^\infty \cos x dx$. По виду

определяем, что это несобственный интеграл 1-го рода по полубесконечному промежутку. Задачу решаем непосредственным интегрированием на основании определения. Выписываем следующую последовательность действий согласно формуле (15). Находим первообразную и предел

$\int_0^\infty \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b$ - предел не существует, следовательно **несобственный интеграл расходится**.

Пример 8. Вычислить или установить сходимость несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

Согласно (15)

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_b^{-1} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{b} \right) = 1 - \text{интеграл сходится}$$

Часто в задаче ставится вопрос о сходимости несобственного интеграла без поиска его первообразной. В этом случае используют следующие теоремы (признаки сравнения):

Теорема 5: Если для всех $a \leq x < +\infty$ выполняется условие $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и интеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ сходится, то $\int_a^{\infty} f(x) dx$ тоже сходится и $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx \geq \int_a^{\infty} f(x) dx$.

Теорема 6: Если для всех x ($x \geq a$) выполняется условие $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ и интеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ расходится, то $\int_a^{\infty} f(x) dx$ тоже расходится.

Т.е. из сходимости несобственного интеграла от большей функции $\varphi(x)$, вытекает сходимость от меньшей и наоборот, если расходится несобственный интеграл от меньшей функции, то расходится и от большей.

Очень часто в качестве сравнения для выяснения сходимости выбирают несобственные интегралы от функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^k}$$

где k – некоторое постоянное число

Исследуем на сходимость несобственный интеграл от этой функции $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^k}$ (16)

Пример 9: Исследовать условия сходимости несобственного интеграла с помощью определения (15) для разных k :

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x^k} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(-k+1)x^{k-1}} \Big|_a^b = \begin{cases} \infty, & \text{при } k \leq 1 \\ \frac{1}{(-k+1)a^{k-1}}, & \text{при } k > 1 \end{cases}$$

Полученные результаты позволяют определить, что несобственный интеграл сходится при $k > 1$.

Пример 10: Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^7 + 1}}$ С помощью теоремы выбираем функцию сравнения (16) по следующему алгоритму

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^7 + 1}} \leq g(x) = \frac{x}{x^{\frac{7}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \quad \text{откуда } k = \frac{4}{3} > 1 \quad \text{и интеграл } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}} \text{ сходится,}$$

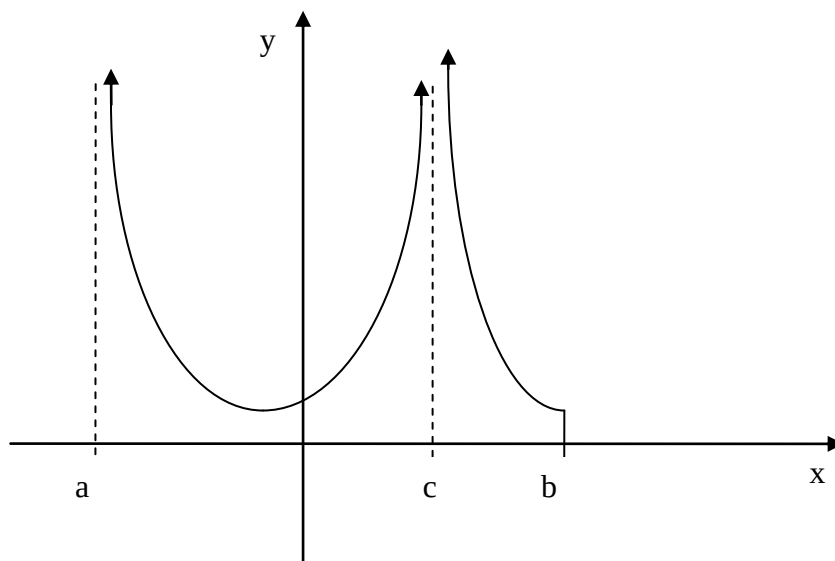
следовательно сходится и заданный интеграл.

Предельный признак сравнения.

Теорема 7. Если при $a \leq x < +\infty$ $f(x) > 0, \varphi(x) > 0$ и существует конечный предел отношения $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \neq 0$ то интегралы $\int_a^{\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3.2. Несобственный интеграл 2-го рода. Интеграл от неограниченной функции.

Точки (с) на промежутке интегрирования $a \leq x < b$ в которых функции неограниченны называют особыми точками. Особыми точками могут являться и концы промежутка интегрирования. $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \infty$



Определение: Несобственным интегралом **второго рода** называется интеграл от **неограниченной на отрезке функции** по отрезку конечной длины.

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x < b$, неограниченна на правом конце отрезка, т.е.

$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$ и $x=b$ **особая точка**, и существует интеграл по любому конечному

промежутку $[a, b-\varepsilon]$ где ε - любое бесконечно малое число, то рассматривается предел от интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (17)$$

и этот предел называется несобственным интегралом 2-го рода.

Несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x) dx$ **сходящийся**, если предел существует и **он конечный**, если не существует или бесконечно большой, то интеграл (17) **расходящийся**.

Аналогично определяется несобственный интеграл если функция $f(x)$ неограниченна на левом конце отрезка $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.

В случае, когда особая точка **с-точка разрыва**, находится внутри промежутка интегрирования ($a \leq c \leq b$) и функция $f(x)$ неограниченна в любой ее ε -окрестности, но интегрируема по любому внутреннему промежутку, не содержащему точку разрыва, например $[a, c-\varepsilon]$, $[c+\varepsilon, b]$, то несобственный интеграл представляется в виде

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \end{aligned}$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.

Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам ранее рассмотренным.

В качестве функции сравнения и соответственно интеграла, с которым производится сравнение, обычно используют интегралы вида

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}, \int_a^b \frac{dx}{(x-b)^k} \quad (k>0)$$

которые сходятся при $k<1$ и расходятся при $k\geq 1$ (проверьте это утверждение непосредственным интегрированием и сравните с результатами примера (9)).

На практике для того чтобы воспользоваться **предельным признаком сравнения** и поиска **функции сравнения**, при выяснении сходимости несобственных интегралов, а также раскрытия неопределенностей при исследовании первообразной, приходится применять все рассмотренные ранее приемы поиска пределов: замечательные пределы, сравнение бесконечно-малых, правила Лопиталья, разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена в окрестности особой точки.

Пример 11: Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$, второго рода.

Подинтегральная функция $f(x) = \frac{1}{e^x - \cos x}$ имеет на левом конце $a=0$ промежутка интегрирования особую точку. Воспользуемся предельным признаком сравнения для чего с помощью формулы Маклорена для e^x и $\cos x$ преобразуем знаменатель подынтегральной функции при $x \rightarrow 0$

$$e^x - \cos x = 1 + x + o(x) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \approx x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \approx x$$

Следовательно при $x \rightarrow 0$ знаменатели дробей являются эквивалентными бесконечно малыми $\frac{1}{e^x - \cos x} \approx \frac{1}{x}$

Так как интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится, то расходится и заданный интеграл

Теоретические вопросы для подготовки по теме: «Определенный интеграл».

1. Расскажите схему построения интегральной суммы и определенного интеграла для данной функции в данном интервале.
2. Сформулируйте геометрический смысл интегральной суммы и определенного интеграла.
3. Сформулируйте и поясните геометрически теорему существования определенного интеграла.
4. Сформулируйте и поясните геометрически основные свойства определенного интеграла.
5. Сформулируйте, запишите и поясните геометрически теорему об оценке величины определенного интеграла.
6. Запишите и геометрически поясните теорему о среднем для определенного интеграла. Что такое среднее значение функции на интервале? Для каких функций теорема справедлива?

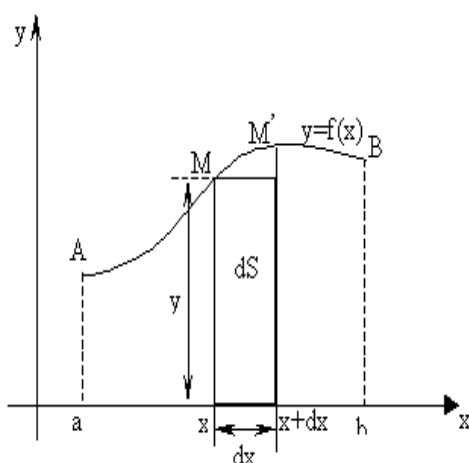
7. Сформулируйте и поясните геометрически определение интеграла с переменным верхним (нижним) пределом.
8. Сформулируйте и докажите теорему о производной интеграла по переменному верхнему пределу.
9. Выведите формулу Ньютона-Лейбница. В чем заключается сходство и различие определенного и неопределенного интегралов?
9. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах методы вычисления определенных интегралов (непосредственное интегрирование, замены переменной, интегрирование по частям,).
10. Дайте определение несобственного интеграла по бесконечному промежутку. В чем его геометрический смысл? Что означает сходимость несобственных интегралов 1-го рода?
11. Дайте определение несобственного интеграла от неограниченной функции (2-го рода). В чем его геометрический смысл? Как установить сходимость несобственных интегралов 2-го рода?
12. В чем заключается метод сравнения при выяснении сходимости несобственных интегралов?
13. Выведите формулы для вычисления площадей плоских фигур – ограниченных линиями заданными явно, параметрически, в полярной системе координат.
14. Выведите формулы для вычисления объемов тел вращения, по площади поперечного сечения тел.
14. Выведите формулы для вычисления длин дуг плоских кривых заданных параметрически, явно, в полярной системе координат.
15. Какие известные вам физические задачи сводятся к вычислениям определенных или несобственных интегралов? Приведите примеры.
16. В чем отличие методов численного интегрирования – метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол?

5. Приложения определенного интеграла

В данном разделе рассмотрим примеры прикладных задач геометрии и физики, в которых вычисление определенного интеграла построенного по условиям задачи позволяет получить требуемый результат. В задачах этого раздела необходимо обратить внимание на обоснование получаемых рабочих формул.

5.1 Площадь плоских фигур в декартовой системе координат.

Наиболее простая геометрическая задача: найти площадь фигуры, границы которой



определены уравнениями соответствующих линий и осью OX . В этом случае рассматривается криволинейная трапеция, о которой говорилось выше (рис. 1.) и используется геометрический смысл определенного интеграла как предел суммы площадей маленьких прямоугольников, образующих ступенчатую фигуру. Элементом площади в прямоугольной декартовой системе координат, полученным в процессе построения интегральной суммы, в этом случае служит прямоугольник площадь которого $\Delta S_i = f(\zeta_i) \Delta x_i$. Тогда площадь криволинейной трапеции находится по формуле

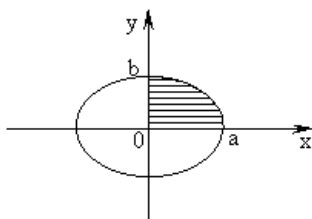
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (14)$$

где S – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, отрезком $[a,b]$ на оси Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, ($a < b$).

Если функция принимает отрицательные значения на промежутке интегрирования, или принимает значения разных знаков, то площадь находится как сумма модулей значений интегралов вычисленных по промежуткам на которых функция знакопостоянна –положительная или отрицательная.

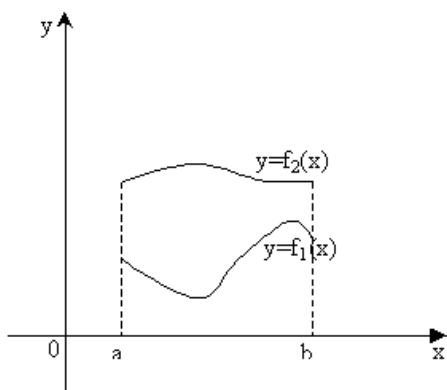
Пример 12. Найти площадь области ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение: Фигура (рис.2) симметрична относительно осей координат, поэтому достаточно найти $\frac{1}{4}S$, интегрируя по промежутку $[0,a]$ функцию, график которой лежит в первой четверти и определяет верхнюю границу области. Запишем уравнение верхней границы области – эллипса для первого квадранта: $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0,a]$, а интеграл вычисляем с помощью замены переменной



$$\frac{1}{4}S = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} \cdot a \cos(t) dt = ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4} ab$$

Ответ: Площадь эллипса $S = \pi ab$ (кв.ед.)



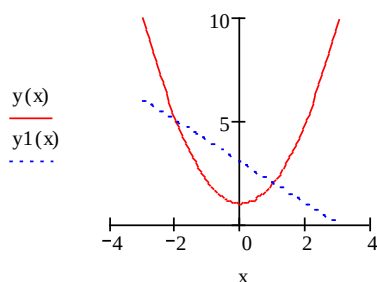
Если в задаче требуется – найти площадь области ограниченной графиками функций, то промежуток интегрирования определяется дополнительными условиями, например, точками пересечения графиков. В этом случае формула для вычисления площади приобретает вид (рис. 3).

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx,$$

где S – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$, ($a < b$).

Пример 13. Найти площадь фигуры ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3$.

На рис. 4 представлена фигура, ограниченная параболой и прямой, площадь которой требуется найти.



Найдем точки
решим следук

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y + x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

параболы и прямой для этого
уравнений:

При решении квадратного уравнения системы $x^2 + x + 2 = 0$, получаем два корня $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, которые являются координатами концов промежутка интегрирования для разности функций

$f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = 3 - x$ (т.к. прямая лежит выше параболы в рассматриваемой области). В результате вычислений получаем: площадь области $S = 25/6$. (Выполнить вычисления самостоятельно)

5.2. Площадь фигуры заданной в параметрической форме.

В этом случае верхняя граница криволинейной трапеции представляет собой линию заданную параметрическими уравнениями $\{x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$, а площадь находится по формуле

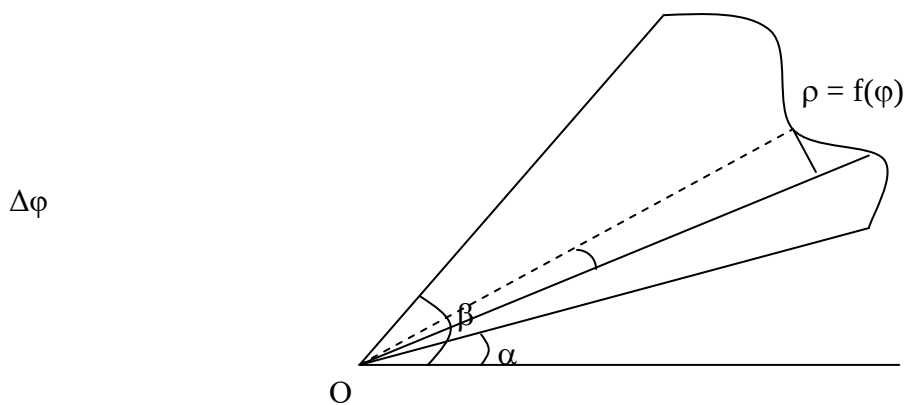
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \quad (15)$$

Формула (15) получается из (14) заменой переменной.

Пример14: Найти площадь области ограниченной линией – графиком функции заданной в параметрической форме: $x = a \cos(t)$, $y = b \sin(t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$ (первая четверть эллипса). Подставляем данные в формулу и результат сравниваем с ранее рассмотренной задачей.

5.3. Площадь области заданной в полярной системе координат.

В этом случае речь идет о площади криволинейного сектора



– площадь области ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами, образующими с полярной осью углы α и β , $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Здесь ρ – длина полярного радиуса, величина всегда положительная ($\rho \geq 0$), соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ – угол наклона этого полярного радиуса к полярной оси. Формула для вычисления площади криволинейного сектора находится по правилу построения интегральной суммы, т.е. как предел суммы площадей ΔS_i секторов с углами при вершине $\Delta \varphi_i$, образовавшихся в результате разбиения сектора лучами, проведенными из вершины. При этом каждый из образовавшихся секторов будет иметь площадь $\Delta S_i = 1/2 \rho(\varphi_i) \Delta \varphi_i$ (как равнобедренный треугольник с боковыми сторонами $\rho(\varphi_i)$ и углом при вершине $\Delta \varphi_i$). В результате получаем

$$S = \lim_{\max \Delta \varphi_i \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\varphi_i) \Delta \varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi \quad (16)$$

Пример 14: Найти площадь области ограниченной линиями $\rho = \rho(\varphi) = ae^{b\varphi}$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), ответ $S = a^2/4b [e^{2b\pi} - 1]$.

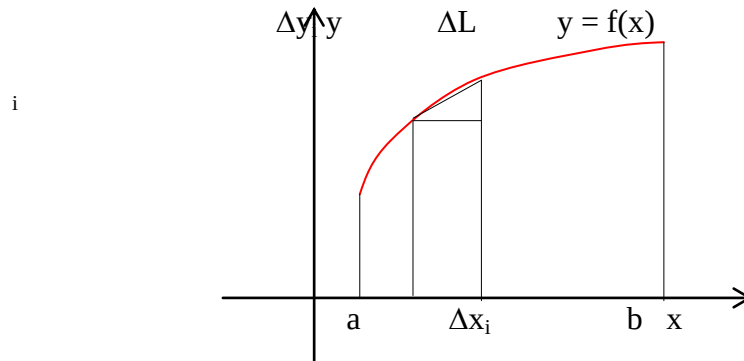
Пример 15: Найти площадь области ограниченной линиями $\rho_1 = \rho(\varphi) = a \sin \varphi$, $\rho_2 = \rho(\varphi) = a \cos \varphi$.

Изобразить область на плоскости и указать точку пересечения линий $\varphi_0 = \pi/4$. Теперь площадь области

$$S = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} a^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

5.4. Формула вычисления длины дуги кривой.

Пусть плоская кривая АВ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Для нахождения длины кривой разобьем ее на n маленьких кусочков ΔL_i дуги. При большом числе разбиения дугу ΔL_i можно спрямить кусочком прямой (хорды) близкой по размеру.



Тогда кривую АВ можно заменить ломанной кривой, построенной из прямых кусочков ΔL_i и вписанной в эту кривую.

Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $L_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i$.

Тогда длина дуги равна $L = \lim_{\max \Delta L_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta L_i$

Из геометрических соображений: $\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i$

Тогда можно показать, что

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (17)$$

Если уравнение плоской кривой задано параметрически, $\{x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции, получаем

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \quad (18)$$

Если задана пространственная кривая, и $\{x = \varphi(t), y = \psi(t) \text{ и } z = Z(t)\}$, то

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2} dt \quad (19)$$

Если кривая задана в **полярных координатах** $\rho = f(\varphi)$, $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$ то

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi, \quad (20)$$

Для вывода формулы (20) надо вспомнить, как перевести уравнение кривой заданной в полярной системе координат в уравнение в параметрической форме и воспользоваться формулой (18).

Пример 16: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = a^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную y : $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ - уравнение верхней половины окружности.

Найдем производную $y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

и по формуле (17) длину четверти окружности

$$\frac{1}{4}L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \cdot \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = a \frac{\pi}{2}$$

Тогда $L = 2\pi a$. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение окружности в полярной системе координат, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, то получим: $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = a^2$, т.е. функция $\rho = f(\varphi) = a = \text{const}$ является уравнением окружности в полярной системе координат и

производная этой функции $\rho' = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$ тогда

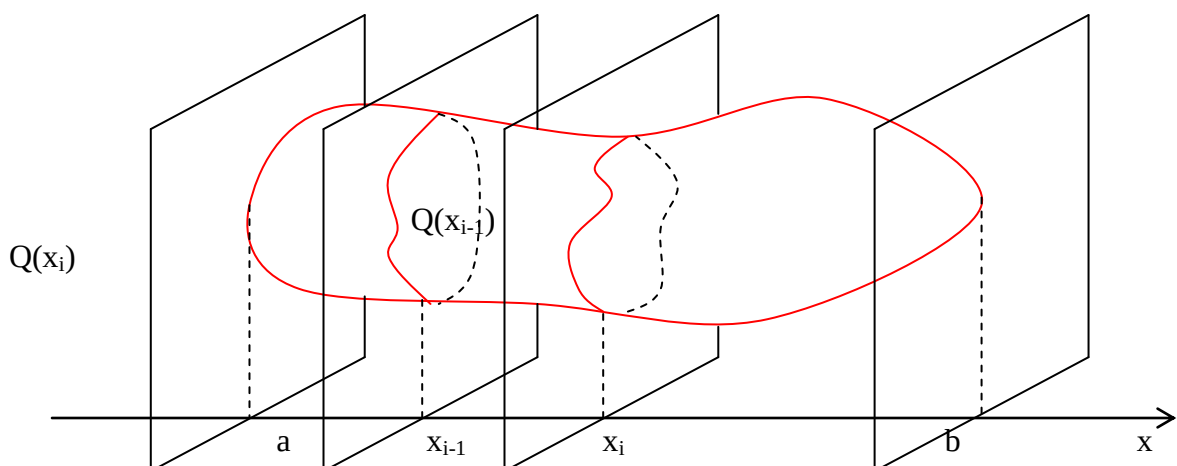
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + a^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi a$$

5.5. Формула вычисления объема фигуры вращения, образованной вращением линии вокруг координатной оси.

Пусть плоская кривая АВ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Мысленно вращая линию вокруг оси ОХ или вокруг оси ОУ получим поверхность вращения ограничивающий некоторый объем. Задача нахождения объема тела может решаться двумя способами.

Первый способ - вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.

Это универсальный метод, пригодный не только для фигур вращения.



Пусть имеется тело объема V . Предполагаем, что площадь любого поперечного сечения тела Q , известна как непрерывная функция $Q = Q(x)$. Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка $[a, b]$. Т.к. на каком-либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция $Q(x)$ (площадь сечения как функция переменной x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно $Q(x)$: M_i и m_i .

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x , то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i \Delta x_i$ и $m_i \Delta x_i$, здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех промежутков разбиения, получим цилиндры, сумма объемов которых равны соответственно $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ (вспомнить суммы Дарбу)

При стремлении к нулю шага разбиения λ , эти суммы имеют общий предел:

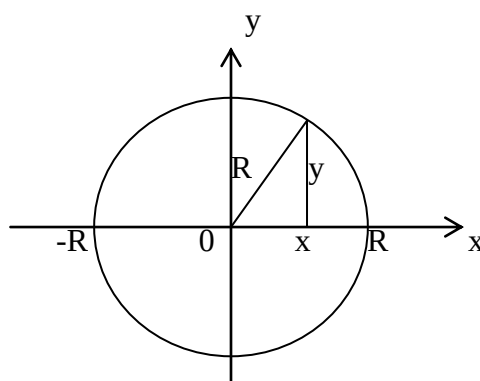
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x) dx = V$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x) dx \quad (21)$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию $Q(x)$, что весьма не просто для сложных тел.

Пример 17: Найти объем шара радиуса R .



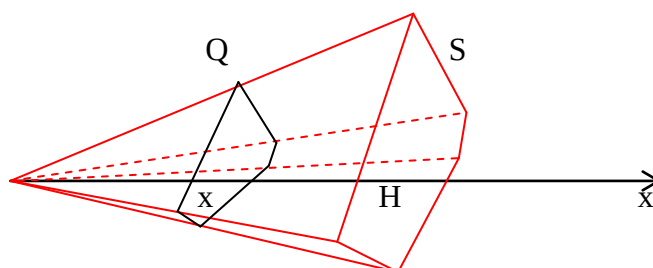
В поперечных сечениях перпендикулярно оси Ox шара получаются окружности переменного радиуса y . В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Тогда площадь окружности является функция от x и имеет вид: $Q(x) = \pi(R^2 - x^2)$.

С помощью формулы (21) получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \pi \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Пример 18: Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S .



При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению x/H , где x – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

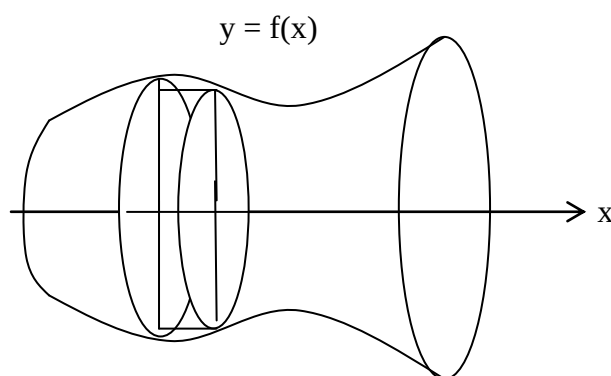
$$\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Отсюда получаем функцию площадей сечений: $Q(x) = \frac{S}{H^2} x^2$.

Находим объем пирамиды: $V = \int_0^H \frac{S}{H^2} x^2 dx = \frac{Sx^3}{3H^2} \Big|_0^H = \frac{1}{3} SH$

Второй способ – вычисление объема тел вращения.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox , то получим так называемое **тело вращения**.



Для построения интегральной суммы проведем разбиение отрезка $[a, b]$ на кусочки Δx_i и через концы образовавшихся отрезков проведем плоскости перпендикулярно оси. Т.к. каждое сечение тела плоскостью $x = \xi_i = \text{const}$ представляет собой круг радиуса $R = |f(\xi_i)|$ и его можно рассматривать как основание цилиндра высотой Δx_i , то объем тела вращения может быть легко найден как предел суммы объемов цилиндров по полученной выше формуле:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Теоретические вопросы для подготовки по теме: «Определенный интеграл».

3. Расскажите схему построения интегральной суммы и определенного интеграла для данной функции в данном интервале.
4. Сформулируйте геометрический смысл интегральной суммы и определенного интеграла.
10. Сформулируйте и поясните геометрически теорему существования определенного интеграла.

11. Сформулируйте и поясните геометрически основные свойства определенного интеграла.
12. Сформулируйте, запишите и поясните геометрически теорему об оценке величины определенного интеграла.
13. Запишите и геометрически поясните теорему о среднем для определенного интеграла. Что такое среднее значение функции на интервале? Для каких функций теорема справедлива?
14. Сформулируйте и поясните геометрически определение интеграла с переменным верхним (нижним) пределом.
15. Сформулируйте и докажите теорему о производной интеграла по переменному верхнему пределу.
16. Выведите формулу Ньютона-Лейбница. В чем заключается сходство и различие определенного и неопределенного интегралов?
9. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах методы вычисления определенных интегралов (непосредственное интегрирование, замены переменной, интегрирование по частям,).
15. Дайте определение несобственного интеграла по бесконечному промежутку. В чем его геометрический смысл? Что означает сходимость несобственных интегралов 1-го рода?
16. Дайте определение несобственного интеграла от неограниченной функции. В чем его геометрический смысл? Как установить сходимость несобственных интегралов 2-го рода?
17. В чем заключается метод сравнения при выяснении сходимости несобственных интегралов?
18. Выведите формулы для вычисления площадей плоских фигур – ограниченных линиями заданными явно, параметрически, в полярной системе координат.
19. Выведите формулы для вычисления объемов тел вращения, по площади поперечного сечения тел
14. Выведите формулы для вычисления длин дуг плоских кривых.
15. Какие физические задачи сводятся к вычислениям определенных или несобственных интегралов? Приведите примеры.
16. В чем отличие методов численного интегрирования – метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол?

Варианты примеров и задач к теме «Определенный интеграл» для разбора в классе и заданий для домашней работы.

1) Вычислить определенные интегралы используя только определение и понятие интегральной суммы. Решение проиллюстрировать геометрическими построениями:

1. $f(x) = 2x - 4$, $[1; 9]$
2. $f(x) = x^2 + 1$, $[-2; 2]$
3. $f(x) = e^{-x}$, $[1; 10]$

2) Вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

1. $\int_a^b e^x dx$.
2. $\int_a^b x^m dx$.
3. $\int_a^b \sin(x) dx$.
4. $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx$.
5. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
6. $\int_a^b \frac{1}{\sin^2(x)} dx$.
7. $\int_a^b C^x dx$.
8. $\int_a^b \frac{1}{x} dx$.
9. $\int_a^b \cos(x) dx$.
10. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2(x)} dx$.

$$\begin{array}{lll}
11. \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx. & 12. \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx. & 13. \int_1^2 \left(\frac{1}{x^4} + x^2 \right) dx. \\
14. \int_1^4 \frac{1 + \sqrt{t}}{t} dt. & 15. \int_1^e \left(\frac{\lg(z) + 1}{z} \right) dz. & 16. \int_0^1 (1+t)^3 dt. \\
17. \int_{-1}^1 \frac{(x-1)^3}{x} dx. & 18. \int_0^{2\pi} (\cos(x) + \sin(x)) dx. & 19. \int_2^4 (x^2 + 2x + 1)^{\frac{1}{2}} dx. \\
20. \int_0^3 \left(\frac{\sin(2x)}{\cos(x)} \right) dx.
\end{array}$$

3. С помощью подходящих подстановок вычислить интегралы

$$\begin{array}{lllll}
1. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}. & 2. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{(x^3 + 1)^4}. & 3. \int_0^{\ln 4} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx. & 4. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^5 + 1}. & 5. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx. \\
6. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) dx}{\sin^5(x)} & 7. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \sin^2(x)} & 8. \int_0^1 (e^x + 4)^2 e^x dx & 9. \int_0^1 e^{2x+1} dx & 10. \int_0^{\pi} \cos^2(x) \sin(x) dx
\end{array}$$

4. С помощью формулы интегрирования по частям вычислить интегралы

$$\begin{array}{lllll}
1. \int_0^1 x e^{-x} dx. & 2. \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx. & 3. \int_1^e \ln(x) dx. & 4. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx. & 5. \int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx. \\
6. \int_0^{\pi} e^x \sin(x) dx. & 7. \int_{\pi/4}^{\pi/3} x \sin^{-2}(x) dx. & 8. \int_{\pi/4}^{\pi/3} x \cos^{-2}(x) dx. & 9. \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x} dx. & 10. \int_0^1 \frac{e^x}{x} dx.
\end{array}$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{array}{ll}
1. y=4-x^2, y=0. & 2. y^2=2px, x=h. \\
3. y=\ln(x), x=c, y=0. & 4. y=x^2, y=2-x^2. \\
5. y=x^2, y=1. & 6. y=\cos^2(x)-\sin^2(x), y=0, x=0, x=\pi/4. \\
7. y=|x|+1, y=0, x=-2, x=1. & 8. y=\sin(x), y=x^2-\pi x. \\
9. x^2-y^2=1, x=2. & 10. y=x^2, y=x^{1/2}.
\end{array}$$

5. Найти длину дуги кривой

$$\begin{array}{ll}
1. y = x^{3/2} \text{ от } x=0 \text{ до } x=4. & 2. y = x^2 - 1, \text{ отсеченный осью } Oх. \\
3. y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln(x) \text{ от } x=1 \text{ до } x=e. & 4. y^2 = \frac{4}{9} (2-x)^3 \text{ от } x=-1 \text{ до } x=2. \\
5. y = x^2 \text{ от } x=0 \text{ до } x=2. & 6. x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, 0 \leq t \leq \pi/2. \\
7. \rho = 2(1 - \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi. & 8. y = e^x + e^{-x} \text{ от } x=0 \text{ до } x=1. \\
9. y = \sin x, y=0, 0 \leq x \leq \pi. & 10. x^2 + y^2 = 16.
\end{array}$$

6. Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox линии заданной уравнением, и ограниченного плоскостями перпендикулярными оси Ox

$$\begin{array}{ll}
1. y = 4x - x^2, y=x. & 2. x^2 + y^2 = 9.
\end{array}$$

$$3. y^2 = 2x, x=1.$$

$$5. y^2 = 8x, 1 \leq x \leq 2.$$

$$7. y = 4 - x^2, y=0, x=0, \text{ где } x \geq 0.$$

$$9. y = x^3, y=1, x=0.$$

$$4. y = x^2, y^2 = x.$$

$$6. x^2 - y^2 = 9, x-2y+6=0.$$

$$8. y = x^2 + 1, y=0, x=1, x=2.$$

$$10. y = \cos(2x), y=0, x=0, \text{ где } 0 \leq x \leq \pi/4.$$

7. Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\arctg(2x)dx}{\pi(1+4x^2)},$$

$$2) \int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4},$$

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1},$$

$$2) \int_{0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}},$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{(x-1)dx}{x\sqrt{x^5 + x^2 + 1}},$$

$$4) \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \sin^2(x)},$$

$$4) \int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[4]{x})dx}{e^{\lg(x)} - 1}.$$

8. Прикладные задачи, приводящие к интегрированию.

- 1) Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,06 м, если известно, что сила растягивающая пружину зависит от длины растяжения и определяется формулой $F=kx$, где k -коэффициент пропорциональности, x – растяжение (м), и что для растяжения пружины на 0,01 м необходима сила 20 Н.
- 2) Определите работу, необходимую для запуска тела массой $m=1000$ кг с поверхности земли на высоту $h=300$ км.
- 3) Автомобиль стартовал с постоянным ускорением 2 м/с^2 и спустя 3 минут начал тормозить с ускорением $0,5 \text{ м/с}^2$ до полной остановки. Найдите максимальную и среднюю скорость автомобиля за время движения, а также путь пройденный автомобилем.
- 4) Найдите момент инерции тонкого кольца массы M и радиуса R относительно оси проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости кольца.
- 5) Найдите массу тонкого стержня длиной $L=8,0$ метров, если линейная плотность материала из которого сделан стержень меняется вдоль стержня по закон $\lambda=5(1+x^3) \text{ кг/м}$.
- 6) Вычислить силу с которой притягивает бесконечно длинная нить из материала с известной линейной плотностью λ точечную массу m находящуюся на расстоянии L от нити.

Пример варианта индивидуальных заданий для самостоятельной работы по теме «Определенный интеграл»

Вариант №1.

1. Вычислить определенный интеграл

$$1) \int_0^2 x \sqrt{1+x^2} dx,$$

$$2) \int_{-0,5}^{0,5} \arccos 2x dx,$$

$$3) \int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2+8}},$$

$$4) \int_2^3 \frac{(x+2)dx}{x^2(x+1)}.$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1. y = \cos^3 x, \left[0; \frac{\pi}{4}\right],$$

$$2. y = \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}}, \left[-\frac{3}{4}; 0\right].$$

3. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}},$$

$$2) \int_0^{\pi/6} \frac{\cos(3x)dx}{\sqrt{(1-\sin(3x))^5}},$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{2x^6+3x^2+5}},$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}.$$

4. Найти площадь фигур, ограниченных линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \rho = \cos \varphi, \\ \rho = 2 \cos \varphi. \end{cases}$$

5. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1)- вокруг оси OX, 2)- вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} x = \sqrt[3]{y-2}, \\ y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

6. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L: \begin{cases} y = 1 - \ln(\cos x), \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} x = 9(t - \sin t), \\ y = 9(t - \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$