РОССИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.И. ПИРОГОВА
МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ИНСТИТУТ БИОМЕДИЦИНЫ (МБФ)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

МОСКВА 2025

МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.И. ПИРОГОВА»
ФГАОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова Минздрава России (Пироговский Университет)

Кафедра высшей математики
Института биомедицины (МБФ)

В.Н. Акимов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ)

Учебное пособие

Рекомендовано КСОП ФГАОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова Минздрава России (Пироговский Университет)

Москва
2025

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.1я73
А39

Авторы:
В.Н. Акимов, д-р физ.-мат. наук.

А39 Дифференциальные уравнения (алгоритмы решений и их приложения): учебное пособие / В.Н. Акимов. — М. : ФГАОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова (Пироговский Университет), 2025. — 92 с.

ISBN 978-5-88458-730-4

В учебном пособии изложены необходимые теоретические сведения и алгоритмы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Помимо решения примеров формального математического характера, значительное внимание уделено составлению уравнений на основе физико-химических закономерностей. Это обстоятельство должно способствовать пониманию студентами важности и эффективности методов теории дифференциальных уравнений в задачах моделирования физико-химических и медико-биологических процессов.

Учебное пособие соответствует действующим ФГОС по специальностям 30.05.01 «Медицинская биохимия», 30.05.02 «Медицинская биофизика», 30.05.03 «Медицинская кибернетика», 06.03.01 «Биология», 06.05.02 «Фундаментальная и прикладная биология», 31.05.01 «Лечебное дело», профиль «Фундаментальная медицина». Диапазон рассматриваемых в нем вопросов является модулем дисциплины «Высшая математика».

Пособие предназначено для студентов 1-го и 2-го курсов медико-биологических и биомедицинских факультетов или институтов медицинских вузов, осваивающих дисциплины «Высшая математика», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Механика, электричество», «Оптика, атомная физика», «Физическая химия». Издание перекрывает объем рабочей программы и может быть полезным для аспирантов, получивших образование по перечисленным специальностям, и преподавателей указанных дисциплин.

Автор благодарит за помощь в оформлении данного пособия выпускников медико-биологического факультета Васильцову М.В. и Пьянькова Д.В.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-5-88458-730-4

© В.Н. Акимов, 2025
© ФГБОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова
(Пироговский Университет), 2025

Содержание

Введение **4**

Основные понятия 4

Часть 1. Задача Коши. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами **8**

§ 1. Однородные уравнения: случай действительных корней характеристического уравнения 8

§ 2. Однородные уравнения: случай комплексных корней характеристического уравнения 15

Часть 2. Неоднородные линейные уравнения **21**

§ 3. Неоднородные уравнения. Методы неопределенных коэффициентов и вариации постоянных 21

§ 4. Неоднородные уравнения. Импульсная функция 31

§ 5. Поведение простых систем при периодических воздействиях. Метод комплексных амплитуд 45

§ 6. Вариант контрольной работы по теме: «Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами» . . . 55

Часть 3. Краевые задачи **63**

§ 7. Однородные уравнения. Проблема Штурма–Лиувилля . . . 63

§ 8. Неоднородные уравнения. Функция Грина 72

§ 9. Некоторые задачи электростатики 78

Введение

Предлагаемое учебное пособие — практическое руководство к решению задач по разделу «Обыкновенные дифференциальные уравнения» дисциплины «Высшая математика» в рамках учебного плана медико-биологических специализаций. В пособии рассматриваются следующие основные постановки задач:

- отыскание частных и общих решений однородных, неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами (уравнения со специальной правой частью, методы неопределенных коэффициентов и вариации постоянных);
- решение задачи Коши;
- метод импульсной функции;
- постановка и решение краевых задач;
- задача Штурма–Лиувилля;
- метод функции Грина.

После определения на начальном этапе основных понятий обыкновенных дифференциальных уравнений по порядку излагаются алгоритмы решения соответствующих задач в общем виде с акцентом на важных моментах используемой теории.

На следующем шаге оцениваемый алгоритм применяется к решению ряда задач формального характера (т.е. для случая заданного уравнения и дополнительных условий).

В части, относящейся к приложениям дифференциальных уравнений, на первом этапе решения обсуждается математическая постановка задачи исходя из ее физической формулировки (т.е. вывод уравнений на основе физико-химических закономерностей и постановка дополнительных условий).

На втором этапе решается задача в ее математически формализованном виде.

Основные понятия

Линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка – это уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n y = f(x), \qquad (0.1)$$

содержащее неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные до n-го порядка включительно, коэффициенты $a_i(x)$ и правую часть $f(x)$, которую называют *неоднородным членом*, или *возмущающей функцией*, или *свободным членом уравнения*. Все или часть коэффициентов

могут быть константами и, в частности, нулями. В последнем случае в уравнении будут отсутствовать соответствующие слагаемые. При $f(x) = 0$ уравнение называют *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Частным решением (говорят также – *интегралом*) уравнения именуют любую функцию аргумента x, обращающую уравнение в тождество. ***Общее решение*** – совокупность всех частных решений.

Линейное дифференциальное уравнение обычно допускает бесконечно большое множество решений.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, как правило, содержат дополнительные условия, которым должны удовлетворять искомая функция и ее производные, что позволяет выделять единственное решение или их определенным образом ограниченное множество. При этом возможны задачи, не имеющие решения, если функции, обращающие дифференциальное уравнение в тождество, не удовлетворяют дополнительным условиям.

Различают **задачи с начальными условиями**, где требуют, чтобы при некотором одном («начальном») значении аргумента искомая функция и ее производные принимали определенные значения, и **краевые задачи**, где функцию и производные задают при двух (или более) значениях аргумента.

В первом случае, если определены функция и производные вплоть до $(n - 1)$-й включительно (так называемая *задача Коши*), имеется единственное решение в том интервале изменения аргумента, где непрерывны коэффициенты и правая часть уравнения (0.1)

В частности, для однородного уравнения с постоянными коэффициентами задача Коши имеет единственное решение во всей области изменения аргумента $(-\infty \le x \le \infty)$.

Условия существования решений для отдельных краевых задач обсуждаются в третьей части пособия.

Обычный путь решения конкретной задачи — *получение общего решения дифференциального уравнения и удовлетворение затем начальным или краевым условиям.*

Общее решение $y(x)$ неоднородного уравнения (0.1) — *это сумма общего решения $\overline{y}(x)$ однородного уравнения:*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (0.2)$$

соответствующего уравнению (0.1), и какого-либо частного решения $\widetilde{y}(x)$ неоднородного уравнения (0.1)

$$y(x) = \overline{y}(x) + \widetilde{y}(x) \qquad (0.3)$$

Общее решение однородного уравнения (0.2) *есть линейная комбинация из n линейно независимых функций* $\overline{y}_l(x)(l = 1, 2, \ldots n)$, *каждая из которых является частным решением однородного уравнения* (0.2)

$$\overline{y}(x) = \sum_{l=1}^{n} c_l \overline{y}_l(x), \quad c_l - \text{произвольные постоянные.} \tag{0.4}$$

Напомним, что ***линейно независимыми*** (в данном интервале изменения аргумента) называют функции $y_l(x)$, при которых равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0, \ (\alpha_l = const, l = 1, 2, 3, \ldots n) \tag{0.5}$$

возможно в любой точке указанного интервала изменения x лишь в том случае, если все α_l равны нулю.

Другими словами, ни одна из этих функций не может быть представлена в виде линейной комбинации остальных. Условию (0.5) эквивалентно требование отличия от нуля определителя Вронского для системы функций $y_l(x)$.

Множество из n частных линейно независимых решений однородного уравнения называют **фундаментальной системой решений** этого уравнения.

Заметим, что выбор элементов фундаментальной системы неоднозначен (например, из существующей системы можно получить новую, умножив один или несколько ее элементов на произвольные числа; можно в качестве новых элементов брать линейные комбинации функций существующей системы и т.д.).

Во многих случаях функции, из которых может быть составлена фундаментальная система решений, известны. Для уравнений с постоянными коэффициентами это элементарные функции: $x^m e^{\lambda x}$, $x^m e^{\alpha x} \cos \beta x$, $x^m e^{\alpha x} \sin \beta x$, где числа m (целое), λ, α и β определяются конкретным видом уравнения (см. § 1, 2)

Частные решения неоднородного уравнения можно получать, например, с помощью метода вариации произвольных постоянных (§ 3), импульсной функции (§ 4) или функции влияния (§ 8). Во всех перечисленных случаях используют результаты интегрирования однородного уравнения. Для уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (квазимногочлен) эффективны методы неопределенных коэффициентов (§ 3) и комплексных амплитуд (§ 5).

Полезно иметь в виду, что для линейных дифференциальных уравнений справедлив **принцип суперпозиции**, а именно: если правая часть (0.1) представляет собой сумму функций

$$f(x) = \sum_{(m)} f_m(x), \tag{0.6}$$

то и его решение есть сумма (суперпозиция) функций $y_m(x)$, каждая из которых — решение того же уравнения с правой частью $f_m(x)$:

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{m} \widetilde{y}_m(x). \tag{0.7}$$

Часть 1. Задача Коши. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

§ 1. Однородные уравнения: случай действительных корней характеристического уравнения

Необходимые формулы

Частные решения однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1.1}$$

ищут в виде:

$$y = e^{\lambda x}, \tag{1.2}$$

где λ — некоторое число, требующее своего определения.
Подстановка (1.2) в (1.1) приводит к алгебраическому уравнению, так называемому **характеристическому уравнению** относительно λ:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{1.3}$$

Его можно получить из (1.1), заменив производную n–го порядка числом λ в надлежащей степени и посчитав искомую функцию «производной нулевого порядка».
Уравнение (1.3), как уже отмечалось, является алгебраическим и имеет, согласно основной теореме алгебры, n корней (действительных или комплексных чисел), среди которых могут быть и кратные. Это означает, что левая часть (1.3) может быть представлена в виде произведения

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0, \tag{1.3а}$$

где λ_l – корни уравнения ($l = 1, 2, \ldots m$), а целые положительные числа k_l – соответствующие им кратности ($m \leq n$). Сумма кратностей равна порядку алгебраического уравнения

$$\sum_{l=1}^{m} k_l = n. \tag{1.4}$$

Ограничимся пока случаем, когда все корни (1.3) действительные. Из теории дифференциальных уравнений следует, что каждому действительному корню λ_l кратности k_l соответствует k_l линейно независимых частных решений

$$y_{l,1} = e^{\lambda_l x},\ y_{l,2} = x e^{\lambda_l x},\ \ldots\ , y_{l,k_l} = x^{k_l - 1} e^{\lambda_l x}. \tag{1.5}$$

Если же кратность корня равна единице, то решение имеет вид (1.2). Решив уравнение (1.3), получим [в соответствии с (1.4), (1.5) и (1.2)] n функций $y_{l,i}(x)$, образующих фундаментальную систему решений. Общее решение уравнения (1.1), как доказывается в теории дифференциальных уравнений, – линейная комбинация этих функций

$$y = \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_l} c_{l,i}\, y_{l,i}, \quad c_{l,i} - \text{произвольные постоянные.} \tag{1.6}$$

Вклад в общее решение (1.6) корня λ_l кратности k_l равен

$$\sum_{i=1}^{k_l} c_{l,i}\, y_{l,i} = \left(c_{l,1} + c_{l,2}x + \ldots + c_{l,k_l}x^{k_l-1}\right) e^{k_l x} = Q_{k_l-1}(x)e^{\lambda_l x}, \tag{1.7}$$

здесь $Q_{k_l-1}(x)$ – полином степени $(k_l - 1)$.

Обращаем внимание на тот факт, что число произвольных постоянных в общем решении совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Примеры решений задач

Задача 1.1. Составить дифференциальное уравнение по заданным корням характеристического уравнения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ и найти его общее решение.

Решение. Записываем характеристическое уравнение в соответствии с (1.3а)

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \tag{1}$$

и далее приводим к виду (1.3):

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0. \tag{2}$$

Соответствующее ему дифференциальное уравнение относительно функции $y(x)$ получаем заменой λ^k на производную k-го порядка

$$y'' - y' - 2 = 0. \tag{3}$$

Результат подстановки значений $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ в (1.2) определяет две линейно независимые функции, образующие фундаментальную систему решений:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2x}, \\ y_2 &= e^{-x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Общее решение, согласно (1.6), есть линейная комбинация найденных выше линейно независимых решений y_1 и y_2:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}, \text{ где } c_1 \text{и } c_2 - \text{произвольные постоянные.} \tag{5}$$

Задача 1.2. Составить дифференциальное уравнение по заданному корню характеристического уравнения $\lambda = -1$, кратности $k = 2$ и найти его общее решение.

Решение. Из условия задачи и (1.3а) следует, что характеристическое уравнение имеет вид:

$$(\lambda + 1)^2 = 0 \tag{1}$$

или:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0. \tag{2}$$

Соответствующее ему дифференциальное уравнение составляем согласно правилу, данному в предыдущем примере:

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{3}$$

Фундаментальную систему решений находим по алгоритму построения (1.5). В рассматриваемом случае кратность корня равна двум, поэтому имеем два линейно независимых частных решения:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x}, \\ y_2 &= xe^{-x}, \end{aligned} \tag{4}$$

на основе которых строим общее решение как их линейную комбинацию:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x}, \tag{5}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Задача 1.3. Составить дифференциальное уравнение по заданным корням характеристического уравнения

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0, \text{ кратность } k_1 = 3; \\ &\lambda_2 = -2, \text{ кратность } k_2 = 1 \end{aligned}$$

и найти его общее решение.

Решение. Следуя выражению (1.3а) и учитывая, что кратности корней равны трем и единице, записываем характеристическое уравнение

$$\lambda^3(\lambda + 2) = 0, \tag{1}$$

т.е.:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 = 0. \tag{2}$$

Искомое дифференциальное уравнение запишем как

$$y'''' + 2y''' = 0. \tag{3}$$

Фундаментальная система решений состоит из четырех функций:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_2 &= x, \\ y_3 &= x^2, \\ y_4 &= e^{-2x}, \end{aligned} \tag{4}$$

первые три из которых относятся к корню $\lambda_1 = 0$ кратности, равной трем, а четвертая соответствует значению корня $\lambda_2 = -2$.

Осталось составить линейную комбинацию найденных частных решений, образующих фундаментальную систему, и записать общее решение уравнения:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-2x}, \tag{5}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные.

Задача 1.4. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0, \tag{1}$$

находим его корни методом разложения на множители:

$$\lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) = 0, \tag{2}$$

откуда определим значения корней:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2, \\ \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_3 &= -1. \end{aligned} \tag{3}$$

Корни оказались действительными и различными. Частные решения получаем по формуле (1.2), последовательно подставляя в нее значения $2, 1, -1$:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2x}, \\ y_2 &= e^{x}, \\ y_3 &= e^{-x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Совокупность этих частных решений образует фундаментальную систему, воспользовавшись которой находим общее решение:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}, \tag{5}$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Задача 1.5. Найти решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ при начальных условиях:

$$\begin{aligned} y(2) &= 1, \\ y'(2) &= -2. \end{aligned}$$

Решение. Предложенная задача служит примером постановки задачи Коши для уравнения второго порядка. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0, \tag{1}$$

откуда

$$\lambda_1 = 1, \tag{2}$$

т.е. один корень кратности $k = 2$. Пара линейно независимых решений строится по алгоритму (1.5) и имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x, \\ y_2 &= xe^x. \end{aligned} \tag{3}$$

Далее составим общее решение согласно (1.6):

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^x. \tag{4}$$

Постоянные c_1 и c_2 определим из начальных условий задачи. Найдем производную общего решения:

$$y'(x) = \Big(c_1 + c_2(x+1)\Big) e^x. \tag{5}$$

Вычислим значения функции y и производной y' для заданного аргумента ($x = 2$) и приравняем значениям, указанным в начальных условиях:

$$y(2) = (c_1 + c_2 \times 2)\, e^2 = 1, \tag{6}$$

$$y'(2) = (c_1 + c_2 \times 3)\, e^2 = -2, \tag{7}$$

В результате придем к системе уравнений относительно постоянных c_1 и c_2:

$$c_1 + 2c_2 = e^{-2}, \tag{8}$$

$$c_1 + 3c_2 = -2\, e^{-2}, \tag{9}$$

значения которых оказываются равными величинам:

$$\begin{aligned} c_1 &= 7\, e^{-2}, \\ c_2 &= -3\, e^{-2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Используя найденные значения постоянных и подставляя их в ранее найденное общее решение, приходим к окончательному результату (решению задачи Коши):

$$y(x) = (7 - 3x)\, e^{x-2}. \tag{11}$$

Напомним, что число начальных условий задачи Коши равно порядку дифференциального уравнения n. С другой стороны, общее решение линейного дифференциального уравнения также содержит n произвольных постоянных, которые и определяются из равного им числа начальных условий. Так, в только что рассмотренном примере мы имели дело с двумя неизвестными постоянными и таким же числом начальных условий.

§ 2. Однородные уравнения: случай комплексных корней характеристического уравнения

Необходимые формулы

Пусть λ – корень характеристического уравнения кратности k – есть комплексное число. Это означает, что:

$$\lambda = \alpha + i\beta, \tag{2.1}$$

где вещественные числа α и β – соответственно действительная и мнимая часть комплексного корня, i – мнимая единица.

Из алгебры известно, что если комплексное число λ есть корень алгебраического уравнения с действительными коэффициентами, то корнем той же кратности является и комплексно сопряженное число:

$$\lambda^* = \alpha - i\beta. \tag{2.2}$$

В теории дифференциальных уравнений устанавливается, что каждой паре комплексно сопряженных корней λ и λ^* кратности k соответствуют $2k$ линейно независимых частных решений, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = x\,e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots\ ,\ y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\\ &y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{k+2} = x\,e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots\ ,\ y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Мнимым корням отвечает $\alpha = 0$, следовательно, в формулах (2.3) экспоненты будут отсутствовать.

Если $k = 1$, имеют место два решения:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos\beta x,\\ y_2 &= e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пусть теперь характеристическое уравнение имеет как действительные, так и комплексные корни. По правилам (1.2), (1.5), (2.3) и (2.4) можно выписать все n функций, образующих фундаментальную систему. Составив их линейную комбинацию [см. (1.6)], получаем общее решение уравнения (1.1).

Из равенства (2.3) легко усмотреть вклад пары комплексно-сопряженных корней в общее решение:

$$\sum_{l=1}^{2k} c_l\,y_l = \tag{2.5}$$

$$= (c_1 + c_2x + \ldots + c_kx^{k-1})\,e^{\alpha x}\cos\beta x + (c_{k+1} + c_{k+2}x + \ldots + c_{2k}x^{k-1})\,e^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$= P_{k-1}(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k-1}(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где $P_{k-1}(x)$ и $Q_{k-1}(x)$ – полиномы степени $(k-1)$.

Примеры решений задач

Задача 2.1. Составить дифференциальное уравнение по корням характеристического уравнения

$$\lambda_1 = 1 + i,\ \lambda_2 = 1 - i$$

и найти его общее решение.
Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = 0$$

или

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0. \tag{1}$$

Соответствующее ему дифференциальное уравнение:

$$y'' - 2y' + 2y = 0. \tag{2}$$

Фундаментальная система решений:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x \cos x, \\ y_2 &= e^x \sin x. \end{aligned} \tag{3}$$

Общее решение:

$$y(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x). \tag{4}$$

Задача 2.2. Составить дифференциальное уравнение по корням характеристического уравнения и найти его общее решение:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\beta, \\ \lambda_2 &= -i\beta, \\ \lambda_3 &= \alpha. \end{aligned}$$

Решение. Составляем и преобразовываем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} &(\lambda - i\beta)(\lambda + i\beta)(\lambda - \alpha) = 0 \\ &(\lambda^2 + \beta^2)(\lambda - \alpha) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Окончательно:

$$\lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \beta^2\lambda - \alpha\beta^2 = 0. \tag{2}$$

Соответствующее дифференциальное уравнение:

$$y''' - \alpha y'' + \beta^2 y' - \alpha\beta^2 y = 0. \tag{3}$$

Записываем фундаментальную систему:

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\beta x, \\ y_2 &= \sin\beta x, \\ y_3 &= e^{\alpha x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Строим общее уравнение как линейную комбинацию частных решений (4):

$$y(x) = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x + c_3 e^{\alpha x}. \tag{5}$$

Задача 2.3. Составить дифференциальное уравнение и найти его общее решение, если заданы следующие корни характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0,\ k_1 = 2; \\ &\lambda_2 = \alpha + i\beta, \\ &\lambda_3 = \alpha - i\beta. \end{aligned}$$

Решение. Составляем и преобразуем характеристическое уравнение

$$\lambda^2\,(\lambda - \alpha - i\beta)(\lambda - \alpha + i\beta) \;= 0$$

или

$$\lambda^2\,\left((\lambda - \alpha)^2 + \beta^2\right) = 0. \tag{1}$$

Окончательно:

$$\lambda^4 - 2\alpha\lambda^3 + (\alpha^2 + \beta^2)\lambda^2 = 0. \tag{2}$$

Выписываем дифференциальное уравнение:

$$y'''' - 2\alpha y''' + (\alpha^2 + \beta^2)y'' = 0. \tag{3}$$

Записываем фундаментальную систему:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_2 &= x, \\ y_3 &= e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ y_4 &= e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \tag{4}$$

Общее решение:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_4 e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{5}$$

Задача 2.4. Найти общее решение уравнения:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

имея в виду, что $\alpha, \omega = const > 0, \alpha < \omega$.
Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\alpha x + \omega^2 = 0. \tag{1}$$

Находим его корни:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\overline{\omega}, \tag{2}$$

здесь введено обозначение $\overline{\omega} \equiv \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$.
Фундаментальная система:

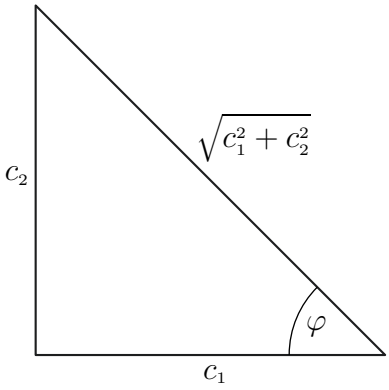
$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\alpha t}\cos\overline{\omega}t, \\ x_2 &= e^{-\alpha t}\sin\overline{\omega}t. \end{aligned} \tag{3}$$

Общее решение:

$$x(t) = (c_1\cos\overline{\omega}t + c_2\sin\overline{\omega}t)\, e^{-\alpha t}. \tag{4}$$

Преобразуем общее решение с тем, чтобы получить выражение, более удобное для практических целей. Обратимся к рис. 2.1.

Рис. 2.1



Из прямоугольного треугольника с катетами c_1 и c_2 найдем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{c_2}{c_1}, \\ \cos\varphi &= \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

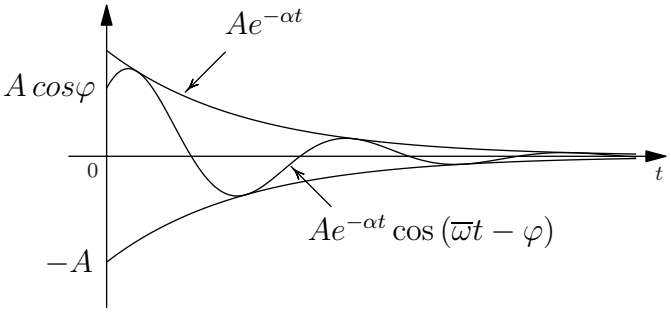
Разделив и умножив общее решение (4) на $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, будем иметь:

$$x(t) = (\cos\varphi \cos\overline{\omega}t + \sin\varphi \sin\overline{\omega}t)e^{-\alpha t} = Ae^{-\alpha t}\cos(\overline{\omega}t - \varphi), \tag{6}$$

где введено обозначение $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

В последнем выражении (6) вместо констант c_1 и c_2 используются две связанные с ними постоянные A и φ, имеющие, как известно, смысл амплитуды и начальной фазы затухающего колебания (рис. 2.2).

Рис. 2.2



Исходное дифференциальное уравнение описывает поведение простой механической или электрической системы после того, как внешнее воздействие прекратилось, — свободное затухающее колебание (см. рис. 2.2).

Задача 2.5. Пример решения задачи Коши. Найти функцию $U(t)$, заданную уравнением

$$U'''' + 4U'' = 0$$

и начальными условиями $U(0) = 1,\ U'(0) = 1,\ U''(0) = -4,\ U'''(0) = 0.$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \\ &\lambda_{3,4} = \pm 2i. \end{aligned} \tag{2}$$

Фундаментальная система:

$$\begin{aligned} U_1 &= 1, \\ U_2 &= t, \\ U_3 &= \cos 2t, \\ U_4 &= \sin 2t. \end{aligned} \tag{3}$$

Общее решение имеет вид:

$$U(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t. \tag{4}$$

Для определения констант по начальным условиям следует прежде всего найти производные общего решения:

$$\begin{aligned} U'(t) &= c_2 - 2c_3 \sin 2t + 2c_4 \cos 2t, \\ U''(t) &= -4c_3 \cos 2t - 4c_4 \sin 2t, \\ U'''(t) &= 8c_3 \sin 2t - 8c_4 \cos 2t. \end{aligned} \tag{5}$$

Используя начальные условия и выражения (5), составим систему уравнений для определения констант:

$$\begin{aligned} U(0) &= c_1 + c_3 = 1, \\ U'(0) &= c_2 + 2c_4 = 1, \\ U''(0) &= -4c_3 = -4, \\ U'''(0) &= -8c_4 = 0. \end{aligned}$$

Далее находим решение указанной системы уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 &= 1, \\ c_3 &= 1, \\ c_4 &= 0. \end{aligned}$$

Окончательный результат (решение задачи Коши) имеет вид:

$$U(t) = t + \cos 2t.$$

Часть 2. Неоднородные линейные уравнения

§ 3. Неоднородные уравнения. Методы неопределенных коэффициентов и вариации постоянных

Необходимые формулы

Для неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{3.1}$$

искомая функция — $y(x)$ — состоит из суммы общего решения $\overline{y}(x)$ однородного уравнения и любого **частного решения** $\widetilde{y}(x)$ **неоднородного уравнения**. Хотя в качестве последнего пригодно любое частное решение, отыскание его достаточно сложно.

Метод неопределенных коэффициентов

Довольно часто в прикладных задачах свободный член является так называемым *квазимногочленом*:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right), \tag{3.2}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – полиномы, α, β – постоянные.

В этом случае для нахождения частного решения $\widetilde{y}(x)$ неоднородного уравнения применяют метод неопределенных коэффициентов. Решение $\widetilde{y}(x)$ ищут в виде :

$$\widetilde{y}(x) = x^s e^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x\right), \tag{3.3}$$

где $R_m(x)$ и $T_m(x)$ — полиномы степени m, которая есть наибольшая из степеней $P(x)$ и $Q(x)$ в выражении (3.2). Показатель s зависит от того, равно ли число

$$\widetilde{\lambda} = \alpha + i\beta$$

одному из корней λ характеристического уравнения, соответствующего (3.1), или нет. А именно:

$$\begin{aligned} &s = 0, \text{ если } \widetilde{\lambda} \neq \lambda, \\ &s = k, \text{ если } \widetilde{\lambda} = \lambda, \text{ где } k - \text{кратность корня } \lambda. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Коэффициенты при степенях x в полиномах $R_m(x)$ и $T_m(x)$ записываются сначала в общем виде. Значения искомых коэффициентов находят после подстановки $\widetilde{y}(x)$ в исходное уравнение (3.1) и последующего, приравнивая сомножители подобных членов в левой и правой частях.

Итак, если $f(x)$ — квазимногочлен, то и $\widetilde{y}(x)$ — тоже квазимногочлен.

Если α, β, $P(x)$ или $Q(x)$ обращаются в нуль, выражения (3.2) и (3.3) упрощаются.

Например,

если $\alpha = \beta = 0$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x), \\ \widetilde{y}(x) &= x^s R_m(x). \end{aligned} \tag{3.5а}$$

Если $\beta = 0$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x)\, e^{\alpha x}, \\ \widetilde{y}(x) &= x^s R_m(x)\, e^{\alpha x}. \end{aligned} \tag{3.5б}$$

Если $\alpha = 0$ и $P(x) = 0$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= Q(x) \sin \beta x, \\ \widetilde{y}(x) &= x^s \left(R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x \right). \end{aligned} \tag{3.5в}$$

Если $\alpha = 0$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x, \\ \widetilde{y}(x) &= x^s \left(R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x \right). \end{aligned} \tag{3.5г}$$

Итак, ***алгоритм отыскания $\widetilde{y}(x)$ методом неопределенных коэффициентов*** сводится к следующему:

1) исходя из вида квазимногочлена, определяют числа α, β, m;
2) сопоставив корни характеристического уравнения с числом $\widetilde{\lambda}$, находят s;
3) записывают частное решение по формуле (3.3), используя в полиномах $R_m(x)$ и $T_m(x)$ неопределенные коэффициенты;
4) подставив $\widetilde{y}(x)$ в исходное уравнение (3.1), определяют значения этих неопределенных коэффициентов и выписывают $\widetilde{y}(x)$ окончательно.

Отметим, что если свободный член — сумма квазимногочленов (или может быть преобразован к такому типу), то, как уже упоминалось [см. (0.7)], частное решение есть сумма решений, каждое из которых соответствует одному из квазимногочленов.

Метод вариации постоянных

В отличие от предыдущего способа, этот метод — **универсальный**, пригодный для любого вида неоднородного члена уравнения $f(x)$, а также и для зависящих от x коэффициентов $a_i(x)$.

Алгоритм метода следующий:

1) интегрируют однородное уравнение и определяют его фундаментальную систему решений;
2) общее решение неоднородного уравнения ищут в виде суммы:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\overline{y}_i(x), \tag{3.6}$$

где $\varphi_i(x)$ — функции, которые находят, решая систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} \varphi_i'\overline{y}_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i'\overline{y}_i' = \ldots = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i'\overline{y}_i^{(n-2)} = 0,\\ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i'\overline{y}_i^{(n-1)} = f(x).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Система состоит из n уравнений, содержащих n неизвестных функций φ_i' , и в силу линейной независимости фундаментальных решений всегда разрешима. После отыскания явных выражений для производных находят интегралы:

$$\varphi_i(x) = \int \varphi_i' dx, \tag{3.8}$$

которые будут содержать n произвольных постоянных. Поскольку решение (3.6) — это линейная комбинация $\overline{y}_i(x)$, в которой функции $\varphi_i(x)$ выступают в качестве коэффициентов, оно включает в себя общее решение однородного уравнения и позволяет удовлетворить начальным условиям.

Примеры решений задач

Задача 3.1. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = e^x.$$

Решение. Из вида свободного члена следует, что это уравнение со специальной правой частью. Из сравнения с общим видом свободного члена (3.2) определяем значения параметров:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= 0, \\ m &= 0, \\ \widetilde{\lambda} &= \alpha + i\beta = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, находим корни:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i. \tag{2}$$

Поскольку $\widetilde{\lambda} = 1$ и, следовательно, не равно ни одному из корней (2), то, согласно (3.4), параметр $s = 0$.
Согласно рекомендации (3.3), используя значения параметров (1), ищем частное решение неоднородного уравнения $\widetilde{y}(x)$ в виде:

$$\widetilde{y}(x) = Ae^x, \tag{3}$$

где A — неизвестная постоянная, которую следует найти.
Подстановка (3) в исходное уравнение позволяет определить неопределенный коэффициент A:

$$Ae^x - 2Ae^x + 2Ae^x = Ae^x = e^x \Rightarrow A = 1. \tag{4}$$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$\widetilde{y}(x) = e^x.$$

Задача 3.2. Найти частное решение уравнения

$$y'' + y = 4\sin x.$$

Решение. Из вида свободного члена устанавливаем, что:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ \beta &= 1, \\ m &= 0, \\ \widetilde{\lambda} &= \alpha + i\beta = i. \end{aligned} \tag{1}$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm i,\ k = 1. \tag{2}$$

Поскольку

$$\widetilde{\lambda} = \alpha + i\beta = i = \lambda_1,$$

т.е. $\widetilde{\lambda}$ равно одному из корней характеристического уравнения, то

$$s = k = 1. \tag{3}$$

В соответствии с (3.3) частное решение ищем в виде:

$$\widetilde{y}(x) = x\,(A\cos x + B\sin x). \tag{4}$$

Для подстановки в исходное уравнение предварительно находим производную второго порядка:

$$\widetilde{y}'' = 2\,(-A\cos x + B\sin x) - x\,(A\cos x + B\sin x). \tag{5}$$

После подстановки в исходное уравнение имеем:

$$\widetilde{y}'' + \widetilde{y} = 2\,(-A\cos x + B\sin x) = 4\sin x. \tag{6}$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах справа и слева от последнего равенства, находим, что:

$$-2A = 4,$$
$$B = 0.$$

Следовательно:

$$A = -2,$$
$$B = 0.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (4), находим искомое частное решение предложенного уравнения:

$$\widetilde{y}(x) = -2x\cos x. \tag{7}$$

Задача 3.3. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + y = 8\sin 2x\cos x$$

при начальных условиях

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1.$$

Решение. Вначале найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. Нетрудно видеть, что

$$\lambda_{1,2} = \pm i,\ k = 1$$

и

$$\overline{y}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x. \tag{1}$$

Далее замечаем, что, поскольку

$$8 \sin 2x \cos x = 4 (\sin x + \sin 3x), \tag{2}$$

свободный член представляет сумму двух квазимногочленов:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 4 \sin x, \\ f_2(x) &= 4 \sin 3x. \end{aligned} \tag{3}$$

Следовательно, нужно искать частное решение неоднородного уравнения в виде суммы:

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x), \tag{4}$$

где каждое слагаемое есть частное решение уравнения с соответствующим свободным членом.
Для первого случая решение было найдено в **задаче 3.2**:

$$\widetilde{y}_1(x) = -2x \cos x. \tag{5}$$

Осталось, таким образом, решить уравнение:

$$y'' + y = 4 \sin 3x. \tag{6}$$

Поскольку ни один из корней характеристического уравнения не совпадает с числом $\widetilde{\lambda} = 3i$, для данного квазимногочлена следует искать $\widetilde{y}_2(x)$ в виде:

$$\widetilde{y}_2(x) = A \cos 3x + B \sin 3x. \tag{7}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов вычисляем вторую производную и делаем подстановку в (1):

$$\widetilde{y}_2'' + \widetilde{y}_2 = -8 (A \cos 3x + B \sin 3x) = 4 \sin 3x. \tag{8}$$

Приравняв коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях равенства, получаем, что:

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ B &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Осталось подставить найденные значения коэффициентов в (7). В результате получим:

$$\widetilde{y}_2(x) = -\frac{\sin 3x}{2}. \tag{9}$$

Частное решение неоднородного уравнения находим теперь как сумму решений (5) и (9):

$$\widetilde{y}(x) = -\left(2x\cos x + \frac{\sin 3x}{2}\right), \tag{10}$$

а общее решение исходного неоднородного уравнения есть:

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \left(2x\cos x + \frac{1}{2}\sin 3x\right). \tag{11}$$

Переходим к решению задачи в постановке Коши. Распорядимся константами c_1 и c_2 так, чтобы удовлетворить заданным начальным условиям. С этой целью вычислим производную выражения (11):

$$y'(x) = -c_1\sin x + c_2\cos x - 2(\cos x + x\sin x) + \frac{3}{2}\cos 3x \tag{12}$$

и далее находим значение искомого решения (11) и значения производной (12) при $x = \dfrac{\pi}{2}$. Приравнивая найденные значения значениям искомого решения и его производной, заданным в начальных условиях, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} + c_2 = \frac{1}{2}, \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \pi - c_1 = \pi - 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда следует, что $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Подставив эти значения констант в общее решение неоднородного уравнения (11), получим, наконец, окончательное решение поставленной задачи Коши:

$$y(x) = (1 - 2x)\cos x - \frac{1}{2}\sin 3x. \tag{14}$$

Задача 3.4. Найти частное решение уравнения

$$y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}.$$

Решение. Поскольку $\sin x$ находится в знаменателе, свободный член не является квазимногочленом. Поэтому в данном случае воспользуемся методом вариации постоянных. Согласно пункту 1) этого метода, в качестве первого шага по известному алгоритму решения однородного уравнения находим частные решения однородного уравнения

$$y'' + y = 0$$

и составляющие фундаментальную систему решений:

$$\begin{aligned} \overline{y}_1 &= \cos x, \\ \overline{y}_2 &= \sin x. \end{aligned} \tag{1}$$

Далее переходим к выполнению пункта 2) применяемого метода, а именно, ищем общее решение в виде (3.6), которое в нашем случае запишется в форме:

$$y(x) = \varphi_1(x)\,\overline{y}_1(x) + \varphi_2(x)\,\overline{y}_2(x).$$

Для определения функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, согласно формулам (3.7), имеем систему двух уравнений (в нашем случае $n = 2$):

$$\begin{aligned} \varphi_1' \cos x + \varphi_2' \sin x &= 0 \\ -\varphi_1' \sin x + \varphi_2' \cos x &= \frac{2}{\sin^3 x}. \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно найти, что:

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= -\frac{2}{\sin^2 x}, \\ \varphi_2' &= 2\frac{\cos x}{\sin^3 x}. \end{aligned} \tag{2}$$

После интегрирования (2) найдем:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2\operatorname{ctg} x + c_1, \\ \varphi_2(x) &= -\frac{1}{\sin^2 x} + c_2. \end{aligned} \tag{3}$$

[Константы в выражениях (3), умноженные на соответствующие фундаментальные функции, дадут общее решение однородного уравнения.]

Поэтому частное решение, которое и требуется найти по условию задачи, можно представить в виде

$$\widetilde{y}(x) = 2\operatorname{ctg} x \cos x - \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{\sin x}.$$

Задача 3.5. Проинтегрировать уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

удовлетворив начальному условию: $y(1) = 1$.

Решение. В заданном уравнении коэффициент при искомой функции не является константой (он равен $\frac{1}{x}$), а свободный член — квазимногочленом.

Метод вариации постоянных пригоден и для линейных уравнений с ***переменными*** коэффициентами.

Обратимся к соответствующему однородному уравнению

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

и приведем его к виду:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Далее проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$$

или

$$\overline{y} = \frac{C}{x}.$$

Положим $C = 1$, т.е. в качестве фундаментального решения выберем функцию

$$\overline{y}_1 = \frac{1}{x}.$$

Общее решение, используя метод вариации, ищем в виде (в нашем случае $n = 1$):

$$y(x) = \varphi_1(x)\,\overline{y}_1(x) = \varphi_1(x)\,\frac{1}{x}. \qquad (1)$$

Система уравнений для $\varphi_1(x)$ сводится к одному уравнению:

$$\varphi_1'\,\overline{y}_1(x) = f(x),$$

т.е. к уравнению

$$\varphi_1' \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}. \tag{2}$$

Откуда:

$$\varphi_1(x) = -\ln|x| + \ln c_1. \tag{3}$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{x}(-\ln|x| + \ln c_1) = \frac{1}{x}\ln\frac{c_1}{|x|}. \tag{4}$$

Константу c_1 находим из начального условия:

$$y(1) = \ln c_1 = 1,$$

и, следовательно, $c_1 = e$. Подставляя это значение постоянной в (4), получим решение поставленной задачи:

$$y(x) = \frac{1}{x}(1 - \ln|x|).$$

§ 4. Неоднородные уравнения. Импульсная функция

Необходимые формулы

Как показывает теория, частное решение неоднородного уравнения (0.1) может быть представлено в виде интеграла, содержащего произведение свободного члена и так называемой импульсной функции.

Импульсная функция (синонимы: *весовая функция, функция влияния*) — частное решение $y_ч(x)$ однородного уравнения (0.3), соответствующего исходному неоднородному уравнению (0.1), которое удовлетворяет при определенном (но любом) $x = \xi$ **специальным** начальным условиям:

$$\begin{aligned} y_ч(\xi) = y'_ч(\xi) = \ldots = y_ч^{(n-2)}(\xi) = 0, \\ y_ч^{(n-1)}(\xi) = 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Разумеется, в (4.1) имеются в виду значения аргумента, лежащие в интервале, для которого существует решение уравнения (0.3), т.е. определены и непрерывны коэффициенты $a_l(x)(l = 1, 2, \ldots, n)$.

Как известно [см. (0.4)], ***решение однородного уравнения*** – это линейная комбинация функций фундаментальной системы с константами, которые в силу (4.1) будут зависеть от переменной ξ. Это обстоятельство учитывают в определении импульсной функции, для которой вводят более удачное обозначение:

$$K(x, \xi) \equiv y_ч(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(\xi)\, \overline{y_i}(x). \tag{4.2}$$

Используя для решения $y_ч(x)$ обозначение $K(x, \xi)$, условия (4.1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} K(\xi, \xi) = K'(\xi, \xi) = \ldots = K^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0, \\ K^{(n-1)}(\xi, \xi) = 1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

[Дифференцирование функции $K(x, \xi)$ производят по x, а затем x полагают равным ξ.]

Частное решение неоднородного уравнения, как доказывается в теории дифференциальных уравнений, выражается формулой:

$$\widetilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi, \tag{4.4}$$

где x_0 – точка, в которой заданы начальные условия.

Решение (4.4) замечательно тем, что в точке x_0 частное решение (4.4) обращается в нуль вместе с его производными вплоть до производной $(n-1)$-го порядка:

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{y}'(x_0) = \ldots = \widetilde{y}^{n-1}(x_0) = 0. \tag{4.5}$$

Следовательно, для удовлетворения начальных условий нужно учитывать только общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \overline{y}(x_0) + \widetilde{y}(x_0) = \overline{y}(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) &= \overline{y}'(x_0) + \widetilde{y}'(x_0) = \overline{y}'(x_0) = y_0', \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= \overline{y}^{(n-1)}(x_0) + \widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \overline{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

(Здесь $y_0,\ y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, определяемые начальными условиями задачи Коши).

Из предыдущего вытекает ***алгоритм построения импульсной функции и отыскания решения задачи Коши***:

1) интегрируем однородное уравнение и находим фундаментальную систему решений;
2) используя найденную систему фундаментальных решений, записываем выражения (4.2, 4.3) и определяем импульсную функцию $K(x, \xi)$;
3) по формуле (4.4) вычисляем частное решение $\widetilde{y}(x)$ неоднородного уравнения;
4) из начальных условий исходно заданной задачи Коши находим константы, входящие в общее решение $\overline{y}(x)$ однородного уравнения, т.е. находим частное решение однородного уравнения и добавляем к нему решение (4.4). Полученная сумма дает окончательное решение задачи Коши.

Алгоритм ***пригоден*** для линейных уравнений ***как с переменными, так и с постоянными коэффициентами***.

Можно показать, что в последнем случае импульсная функция зависит только от разности $x - \xi \equiv s$:

$$K(x, \xi) = K(x - \xi) = K(s) \tag{4.7}$$

и может быть найдена из исходного однородного уравнения (с аргументом s) и соответствующих условий в точке $s = 0$:

$$\begin{aligned} K(0) = K'(0) = \ldots = K^{(n-2)}(0) = 0, \\ K^{(n-1)}(0) = 1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

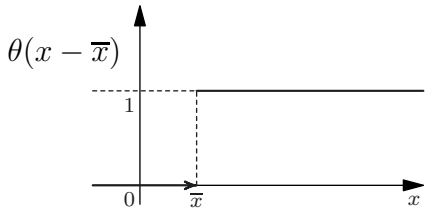
Это обстоятельство заметно упрощает решение уравнений с постоянными коэффициентами.

Далее в задачах будет использоваться так называемая единичная функция $\theta(x - \overline{x})$ (функция включения, или функция Хевисайда). По определению:

$$\theta(x-\overline{x}) = \begin{cases} 0, & x - \overline{x} < 0 \\ 1, & x - \overline{x} \geq 0, \end{cases} \tag{4.9}$$

график которой приведен на рис. 4.1.

Рис. 4.1



Метод импульсной функции полезен при исследовании системы (описываемой линейным дифференциальным уравнением), которая подвергается различным внешним воздействиям, задаваемым видом свободного члена. Действительно, после того как найдена импульсная функция, частное решение неоднородного уравнения определяется непосредственно через эту функцию и свободный член уравнения.

Метод особенно удобен, если $f(x)$ — разрывная функция, а начальные условия нулевые; в этом случае решение однородного уравнения есть тождественный нуль и поведение системы описывается только выражением (4.4).

Примеры решений задач

Задача 4.1. Найти импульсную функцию уравнения

$$y'' - \alpha^2 y = f(x),\ \alpha = const > 0. \tag{1}$$

Решение. Следуя пункту 1) алгоритма построения импульсной функции, находим фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - \alpha^2 y = 0,$$

вид которых легко устанавливается:

$$\overline{y}_1(x) = e^{\alpha x},$$
$$\overline{y}_2(x) = e^{-\alpha x}.$$

Следуя пункту 2) того же алгоритма, записываем выражение (4.2) для импульсной функции:

$$K(x,\xi) = C_1(\xi)e^{\alpha x} + C_2(\xi)e^{-\alpha x}. \tag{2}$$

Найдем теперь импульсную функцию как частное решение однородного уравнения, удовлетворяющее при $x = \xi$ начальным условиям (4.3):

$$K(\xi,\ \xi) = 0 \ \Rightarrow\ C_1(\xi)\, e^{\alpha\xi} + C_2(\xi)\, e^{-\alpha\xi} = 0,$$
$$K'(\xi,\ \xi) = 1 \ \Rightarrow\ \alpha C_1(\xi)\, e^{\alpha\xi} - \alpha C_2(\xi)\, e^{-\alpha\xi} = 1.$$

Решив систему, получим:

$$C_1(\xi) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\xi},$$
$$C_2(\xi) = -\frac{1}{2\alpha} e^{\alpha\xi}.$$

Подстановка найденных значений коэффициентов в выражение (2) приводит к следующему выражению для импульсной функции:

$$K(x,\ \xi) = \frac{1}{2\alpha}\left(e^{\alpha x}e^{-\alpha\xi} - e^{-\alpha x}e^{\alpha\xi}\right) = \frac{1}{\alpha}\,\frac{e^{\alpha(x-\xi)} - e^{-\alpha(x-\xi)}}{2} = \frac{\operatorname{sh}\alpha\,(x-\xi)}{\alpha}. \tag{3}$$

Решим эту задачу более экономным способом, а именно, воспользуемся тем обстоятельством, что исходное уравнение (1) — уравнение с постоянными коэффициентами и, следовательно, импульсная

функция, согласно ранее сделанному замечанию, может быть найдена как решение однородного уравнения с аргументом $s = x - \xi$ при начальных условиях (4.8).
По аналогии с (2) можно написать:

$$K(s) = C_1 e^{\alpha s} + C_2 e^{-\alpha s}.$$

В соответствии с начальными условиями (4.8) имеем:

$$K(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 + C_2 = 0,$$
$$K'(0) = 1 \;\Rightarrow\; \alpha C_1 - \alpha C_2 = 0,$$

откуда:

$$C_1 = \frac{1}{2\alpha},$$
$$C_2 = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Следовательно, для импульсной функции получаем:

$$K(s) = \frac{C_1 e^{\alpha s} + C_2 e^{-\alpha s}}{2\alpha} = \frac{\operatorname{sh} \alpha s}{\alpha}.$$

Или, возвращаясь к переменным x и ξ, представим окончательный результат в виде:

$$K(x - \xi) = \frac{\operatorname{sh} \alpha (x - \xi)}{\alpha},$$

что, как и должно быть, совпадает с ранее полученным решением поставленной задачи.

Задача 4.2. Найти импульсную функцию уравнения:

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0; \;\; \alpha, \omega = const > 0. \tag{1}$$

Рассмотреть случаи $\alpha < \omega, \alpha = \omega$ и $\alpha > \omega$.
Решение. Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2 = 0,$$

соответствующее заданному дифференциальному уравнению, находим его корни:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}. \tag{2}$$

Переходим теперь к построению импульсной функции и рассмотрим вариант $\alpha < \omega$. В этом случае корни, как видно из (2), оказываются комплексными. Обозначим

$$\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \overline{\omega}$$

(ω есть величина действительная) и запишем корни (2) в форме:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\overline{\omega}, \text{ где } i \text{ — мнимая единица.}$$

Следуя пункту 1) алгоритма построения импульсной функции, находим фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения.

Однако, в отличие от предыдущей задачи, система фундаментальных решений определяется по формулам (2.2), (2.3), так как корни комплексные. Учитывая, что кратность корней равна в нашем случае единице, находим два линейно независимых решения, образующих искомую фундаментальную систему:

$$e^{-\alpha s}\cos\overline{\omega}s \quad \text{и} \quad e^{-\alpha s}\sin\overline{\omega}s$$

Следуя пункту 2) алгоритма построения импульсной функции, записываем выражение (4.2) для импульсной функции:

$$K(s) = C_1 e^{-\alpha s}\cos\overline{\omega}s + C_2 e^{-\alpha s}\sin\overline{\omega}s. \tag{3}$$

На следующем этапе вычислений находим константы C_1, C_2. Учитывая, что мы имеем дело с уравнением второго порядка, согласно начальным условиям (4.8), получаем:

$$K(0) = C_1 = 0, \quad \text{т.е.} \quad C_1 = 0.$$

Значение первой производной при $s = 0$ равно единице, следовательно:

$$K'(0) = -\alpha C_1 + \omega C_2 = 1.$$

Подставляя в это уравнение найденное ранее значение C_1, определяем значение второй константы:

$$C_2 = \frac{1}{\overline{\omega}}.$$

На основании равенства (3), принимая во внимание значения постоянных C_1, C_2, находим вид выражения для импульсной функции:

$$K(s) = e^{-\alpha s}\frac{\sin\overline{\omega}s}{\overline{\omega}}.$$

Наконец, возвращаясь к исходным переменным ($s = x - \xi$), получим:

$$K(x-\xi) = e^{-\alpha(x-\xi)} \frac{\sin \overline{\omega}(x-\xi)}{\overline{\omega}}. \tag{4}$$

Затем проанализируем следующий вариант задачи.

Пусть $\alpha = \omega$, тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$. Следовательно, это — случай кратного действительного корня кратности два. Поэтому строим два фундаментальных решения по алгоритму (1.5):

$$e^{-\alpha s} \quad \text{и} \quad s e^{-\alpha s}.$$

Соответственно, импульсная функция строится как линейная комбинация указанных фундаментальных решений:

$$K(s) = (C_1 + s\,C_2)\, e^{-\alpha s}. \tag{5}$$

Как и ранее, на основе начальных условий (4.8) находим уравнения относительно констант C_1, C_2:

$$\begin{aligned} K(0) &= C_1 = 0, \\ K'(0) &= -\alpha C_1 + C_2 = 1, \quad \text{откуда} \quad C_2 = 1. \end{aligned}$$

Выражение для импульсной функции получим в результате подстановки значений $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$ в (5):

$$K(s) = s\, e^{-\alpha s}$$

или в первоначальных переменных:

$$K(x-\xi) = (x-\xi)\, e^{-\alpha(x-\xi)}.$$

Пусть $\alpha > \omega$.
Тогда, если обозначить $\overline{\alpha} = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$, имеем два различных действительных корня:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \overline{\alpha},$$

которым соответствуют два линейно независимых решения:

$$e^{\overline{\alpha} s}\, e^{-\alpha s} \quad \text{и} \quad e^{-\overline{\alpha} s}\, e^{-\alpha s}.$$

Искомую функцию запишем в виде линейной комбинации отмеченных решений однородного уравнения:

$$K(s) = \left(C_1 e^{\overline{\alpha} s} + C_2 e^{-\overline{\alpha} s}\right) e^{-\alpha s}. \tag{6}$$

Из (4.8) получаем уравнения для определения постоянных:

$$K(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 = -C_2,$$
$$K'(0) = (-\alpha + \overline{\alpha})\, C_1 - (\alpha + \overline{\alpha})\, C_2 = 1.$$

Далее находим, что:

$$C_1 = \frac{1}{2\overline{\alpha}},$$
$$C_2 = -\frac{1}{2\overline{\alpha}}.$$

Из (6), учитывая значения только что найденных констант, получим:

$$K(s) = \frac{1}{\overline{\alpha}} \frac{e^{\overline{\alpha} s} - e^{-\overline{\alpha} s}}{2} e^{-\alpha s} = \frac{\operatorname{sh}(\overline{\alpha} s)}{\overline{\alpha}} e^{-\alpha s}.$$

Окончательно, поскольку $s = x - \xi$, будем иметь:

$$K(x - \xi) = \frac{\operatorname{sh}\left(\overline{\alpha}(x - \xi)\right)}{\overline{\alpha}} e^{-\alpha(x-\xi)}.$$

Задача 4.3. С помощью метода импульсной функции решить задачу Коши для уравнения:

$$y'' - y = f(x) = A\theta(x), \ A = const \tag{1}$$

и начальных условий:

$$y(-\tau) = y'(-\tau) = 0, \ (\tau > 0).$$

Решение. Результаты **задачи 4.1** позволяют сразу записать для (1) решение соответствующего однородного уравнения и импульсную функцию. А именно, положив в выражениях (2) и (3) **задачи 4.1** $\alpha = 1$, имеем:

$$\overline{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$
$$K(x, \xi) = \operatorname{sh}(x - \xi).$$

Частное решение неоднородного уравнения, полученное с помощью импульсной функции, построено таким образом, что при начальном значении аргумента (в данном случае при $x = -\tau$) обращается в нуль вместе со всеми производными до $(n-1)$ порядка включительно (4.5).

Рис. 4.2

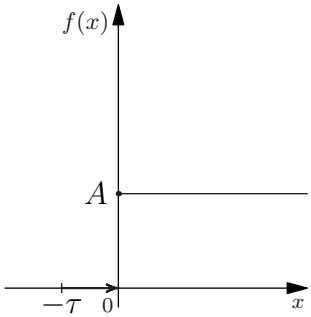
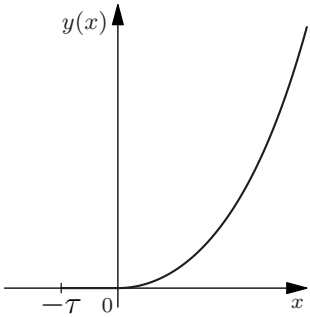


Рис. 4.3



Поэтому можно сразу потребовать, чтобы решение однородного уравнения удовлетворяло нулевым начальным условиям:

$$\begin{cases} y(-\tau) = \overline{y}(-\tau) = C_1 e^{-\tau} + C_2 e^{\tau} = 0 \\ y'(-\tau) = \overline{y}'(-\tau) = C_1 e^{-\tau} - C_2 e^{\tau} = 0 \end{cases}$$

Разрешая систему уравнений относительно C_1 и C_2, находим, что они равны нулю. Таким образом, во всей области существования $y(x)$ вклад решения однородного уравнения отсутствует. Остается, согласно (0.4), лишь вклад решения неоднородного уравнения. Оно, согласно (4.4), имеет вид:

$$\widetilde{y}(x) = \int_{-\tau}^{x} K(x, \xi)\, A\theta(\xi)\, d\xi. \qquad (2)$$

Исследуем теперь характер поведения решения более детально. Рассмотрим вначале значения переменной x в интервале $-\tau \le x < 0$. В таком случае переменная интегрирования ξ принимает отрицательные значения, и функция $\theta(\xi)$ при отрицательных значениях ξ по определению (4.9) равна нулю (см. рис. 4.2). Отсюда делаем вывод о равенстве нулю интеграла (2) в интервале $-\tau \le x < 0$.

При значениях $x \ge 0$ *интеграл вычисляется элементарно и равен:*

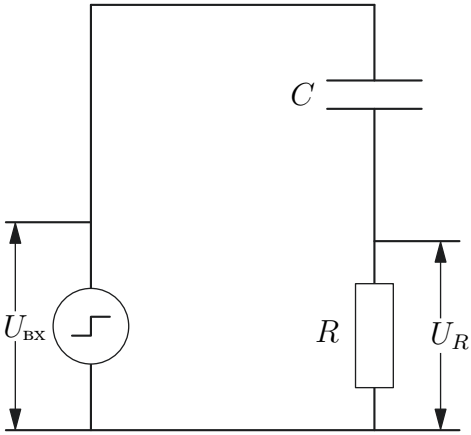
$$\widetilde{y}(x) = \int_{-\tau}^{x} K(x, \xi)\, A\theta(\xi)\, d\xi = A\,(\operatorname{ch} x - 1),$$

а решение, как следует из полученного результата, неограниченно возрастает с ростом x (см. рис. 4.3). Окончательный результат представим в форме:

$$y(x) = \widetilde{y}(x) = \begin{cases} 0, & -\tau \le x < 0 \\ A\,(\operatorname{ch} x - 1), & x \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4.4. Определить напряжение U_R на сопротивлении RC-цепочки (четырехполюсник, рис. 4.4), если на нее подан прямоугольный импульс напряжения $U_{\text{вх}} = U_0\theta(t)$. К моменту включения импульса конденсатор был не заряжен.

Рис. 4.4



Решение. Составим уравнение, описывающее поведение четырехполюсника. Согласно закону Кирхгофа, сумма напряжений на конденсаторе U_C и на сопротивлении U_R должно равняться входному напряжению:

$$U_C + U_R = U_{\text{вх}}(t). \tag{1}$$

Так как

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{q}{C}, \\ U_R &= jR, \\ j &= \dot{q}, \end{aligned} \tag{2}$$

[где $q = q(t)$, $j = j(t)$, $C = const, R = const$ есть, соответственно, заряд, ток, емкость и сопротивление] из (1) и (2) получаем для процесса изменения заряда во времени неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = U_{\text{вх}}(t). \tag{3}$$

Решив это уравнение, мы найдем зависимость величины заряда от времени. Зная ее и применив соотношения (2), нетрудно далее определить ток в цепи и напряжение на сопротивлении.

Введем обозначения $\tau = RC$, $\alpha = \dfrac{U_0}{R}$, тогда вместо (3) получим более удобное выражение:

$$\dot{q} + \frac{q}{\tau} = \alpha\,\theta(t). \tag{4}$$

По начальному условию в любой момент $t_0 \le 0$: $q(t_0) = 0$. Интегрируя однородное уравнение, соответствующее (4), нетрудно получить:

$$\overline{q}(t) = \overline{C} e^{-\frac{t}{\tau}},\ \overline{C} = const. \tag{5}$$

Поскольку далее частное решение неоднородного уравнения будет отыскиваться методом импульсной функции, то в начальный момент, в силу (4.6), заряд определяется только решением однородного уравнения.

Это позволяет сразу определить константу $\overline{C}$:

$$q(t_0) = \overline{q}(t_0) = \overline{C}\, e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 0,$$

откуда $\overline{C} = 0$ и, следовательно, $\overline{q}(t) = 0$. Другими словами, здесь, как и в предыдущей задаче, отличным от нуля является только решение неоднородного уравнения $\widetilde{q}(t)$.

Введем переменную $s = t - \xi$. Импульсная функция, согласно алгоритму ее построения, должна иметь вид, аналогичный (5):

$$K(s) = \widetilde{C}\, e^{-\frac{s}{\tau}},$$

причем, в силу (4.8), $K(0) = \widetilde{C} = 1$. Таким образом:

$$K(t-\xi) = e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}. \tag{6}$$

По формуле (4.4), учитывая (6), найдем частное решение $\widetilde{q}(t)$:

$$\widetilde{q}(t) = \int_{t_0}^{t} K(t-\xi)\, f(\xi)\, d\xi = a\, e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{\xi}{\tau}}\, d\xi = a\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ (x \ge 0).$$

Следовательно:

$$q(t) = \widetilde{q}(t) = a\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ (x \ge 0). \tag{7}$$

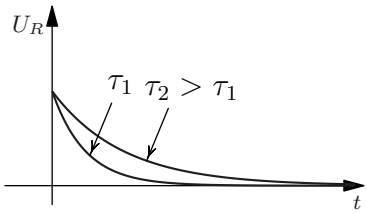
Напомним, что $a = \dfrac{U_0}{R}$. Дифференцируя (7), получаем ток в цепи, а затем и напряжение на сопротивлении:

$$j = \dot{q} = \frac{U_0}{R}\, e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$U_R = Rj = U_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, \theta(t).$$

Напряжение U_R оказывается максимальным в момент включения источника импульса ($t = 0$) и по мере роста заряда емкости (характерное время $\tau = RC$), как и ток, стремится к нулю (рис. 4.5).

Рис. 4.5

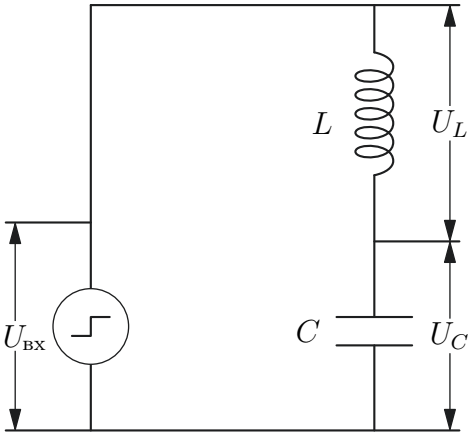


Задача 4.5. Найти напряжение на емкости в LC-цепочке при ступенчатом сигнале на входе:

$$U_{\text{вх}} = U_0\,\theta(t).$$

К моменту включения ($t \le 0$) конденсатор не заряжен и ток в цепи отсутствует **(рис. 4.6)**.

Рис. 4.6



Решение. Составим уравнение, описывающее поведение системы. Для этого используем закон Кирхгофа, соотношения (2) **задачи 4.4** и связь между током и напряжением на индуктивности:

$$U_L + U_C = U_{\text{вх}}(t),$$
$$U_L = L\frac{dI}{dt}.$$

Из этих уравнений следует, что

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = U_{\text{вх}}(t). \tag{1}$$

После приведения (1) к удобному для дальнейших выкладок виду имеем $\left(\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\dot{q}) = \ddot{q}\right)$:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = b\,\theta(t), \tag{2}$$

где введены обозначения $\omega^2 = (LC)^{-1}$, $b = \dfrac{U_0}{L}$.

Записываем искомую функцию $q(t)$ в уравнении (2) в общем виде (т.е. строим общее решение неоднородного уравнения):

$$q(t) = \overline{q}(t) + \widetilde{q}(t).$$

Находим по общим правилам общее решение $\overline{q}(t)$ однородного уравнения для случая комплексных корней. В результате получим:

$$\overline{q}(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \tag{3}$$

Импульсную функцию найдем, заменив в последнем выражении аргумент t на s и потребовав выполнения условий (4.8):

$$K(s) = C_1 \cos \omega s + C_2 \sin \omega s, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} K(0) &= C_1 = 0, \\ K'(0) &= \omega C_2 = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Из (4) и (5) имеем:

$$K(t-\xi) = \frac{\sin \omega\,(t-\xi)}{\omega}.$$

[Можно было также воспользоваться выражением (4) **задачи 4.2**, положив $\alpha = 0, x = t$].

Теперь, обратившись к формуле (4.4), найдем частное решение $\widetilde{q}(t)$ неоднородного уравнения (2):

$$\widetilde{q}(t) = \int_{t_0}^{t} K(t-\xi)\, f(\xi)\, d\xi = \frac{b}{\omega} \int_0^t \sin \omega\,(t-\xi)\, d\xi = \frac{b}{\omega^2}(1 - \cos \omega t).$$

Нетрудно убедиться: $\overline{q}(t) \equiv 0$, что является следствием нулевых начальных условий:

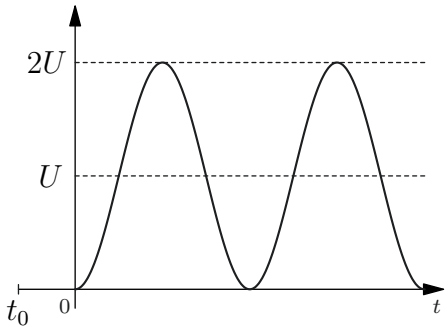
$$q(t_0) = \dot{q}(t_0) = 0 \ (t_0 \le 0).$$

Окончательный ответ будет таким:

$$U_C = \frac{\widetilde{q}}{C} = U_0(1 - \cos \omega t) \text{ (учтено, что } b = \frac{U_0}{L},\ \omega^2 LC = 1).$$

Как видно, при подаче на вход ступенчатого сигнала в системе, при отсутствии сопротивления, возникают незатухающие гармонические колебания с частотой, определяемой ее собственными характеристиками (рис. 4.7).

Рис. 4.7



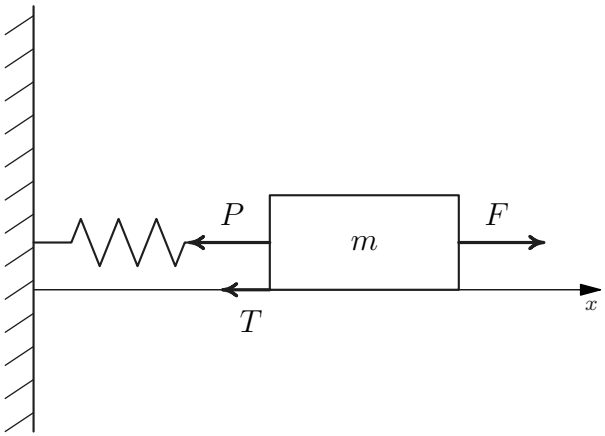
§ 5. Поведение простых систем при периодических воздействиях. Метод комплексных амплитуд

Этот раздел посвящен важному для практических приложений типу задач — задачам о поведении механических и электрических систем при периодическом характере внешних воздействий. Мы рассмотрим примеры систем, которые различны по своей физической природе, однако описываются одним и тем же типом дифференциальных уравнений второго порядка (с точностью до физического смысла коэффициентов уравнения).

Исходные уравнения

Рассмотрим движение массы m под действием трех сил, направленных вдоль оси x (рис. 5.1): упругой $\boldsymbol{P}(x)$, зависящей от положения тела; силы трения $\boldsymbol{T}(v)$, зависящей от скорости тела $v = \dot{x}$; и внешней, изменяющейся со временем силы $\boldsymbol{F}(t)$.

Рис. 5.1



Найдем, как зависит координата x центра тяжести тела от времени: $x = x(t)$. По второму закону Ньютона, произведение массы m на вектор ускорения $\boldsymbol{a}$ равно сумме действующих сил:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P}(x) + \boldsymbol{T}(v) + \boldsymbol{F}(t). \tag{5.1}$$

Запишем входящие в это уравнение векторы в координатной форме:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a\boldsymbol{i} = \ddot{x}\boldsymbol{i}, \\ P(x) &= -\gamma x\boldsymbol{i}, \\ T(v) &= -k\dot{x}\boldsymbol{i}, \\ F(t) &= F(t)\boldsymbol{i}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $\boldsymbol{i}$ — единичный базисный вектор, направленный в положительном направлении оси x; k, γ — соответственно коэффициент трения и коэффициент упругости пружины (положительные константы); x отсчитывается от положения равновесия, когда пружина не растянута.

Иными словами, начало координат располагается в точке центра массы тела при равновесном положении пружины.

После подстановки (5.2) в (5.1) и приравнивания соответствующих коэффициентов при базисном векторе $\boldsymbol{i}$ приходим к скалярной форме записи уравнения (5.1):

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + \gamma x = F(t). \tag{5.3}$$

Преобразуем его к более удобному виду. С этой целью введем новые константы α, ω_0 и функцию:

$$\begin{aligned} \frac{k}{m} &= 2\alpha, \\ \frac{\gamma}{m} &= \omega_0^2, \\ f(t) &= -\frac{F(t)}{m}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

В принятых обозначениях (5.3) запишется в виде:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \tag{5.5}$$

Прежде чем приступить к интегрированию неоднородного уравнения (5.5), убедимся, что такое же уравнение возникает и для заряда конденсатора в электрической цепи. Пусть имеется замкнутый контур (рис. 5.2), содержащий источник переменной электродвижущей силы (ЭДС) $E = E(t)$, индуктивность L, сопротивление R и емкость C.

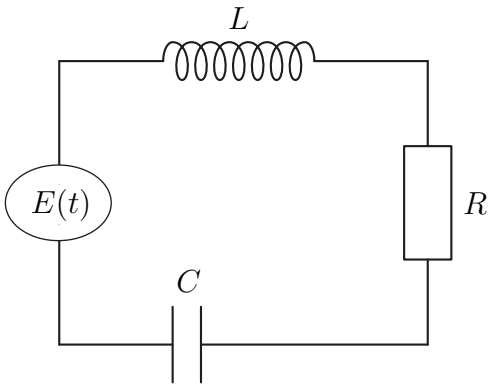
Согласно закону Кирхгофа, сумма падений напряжений на элементах контура равна ЭДС:

$$U_L + U_R + U_C = E(t). \tag{5.6}$$

Из физики также известно, что:

$$\begin{aligned} U_L &= L\frac{dI}{dt}, \\ U_R &= IR, \\ U_C &= \frac{q}{c}, \\ I &= \dot{q}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Рис. 5.2



Воспользуемся соотношениями (5.7) и запишем выражение (5.6) в виде:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{c} = E(t). \tag{5.8}$$

После деления на L и введения обозначений

$$\begin{aligned} \frac{R}{L} &= 2\alpha, \\ \frac{1}{LC} &= \omega_0^2, \\ f(t) &= \frac{1}{L}\frac{dE}{dt}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

дифференцируя обе части (5.8) по времени, получим дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t),$$

полностью совпадающее с уравнением (5.5), которое описывает процесс абсолютно другой физической природы.

Таким образом, поведение двух разных физических величин – координаты $x(t)$ и заряда $q(t)$, характеризующих различные физические процессы, описывается одним и тем же уравнением.

Сопоставление равенств (5.4) и (5.9) показывает также соответствие ролей: коэффициента трения и сопротивления, массы и индуктивности, коэффициента упругости пружины и величины, обратной емкости.

Однородные уравнения. Свободные колебания

Общее решение неоднородного уравнения включает в себя, как известно, решение соответствующего ему однородного уравнения. Поэтому рассмотрим сначала однородное уравнение:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{5.10}$$

исследование которого имеет и самостоятельное значение, поскольку описывает поведение системы в отсутствие внешнего воздействия. Нетрудно убедиться, что в зависимости от соотношения между ω_0 и α, решениями (5.10) будут разные функции.

Ограничимся случаем слабого затухания, то есть примем $\alpha < \omega_0$. Составив уравнение согласно (1.3), найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\overline{\omega}$$

(мы ввели обозначение $\overline{\omega} \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, i — мнимая единица). Общее решение уравнения (5.10) выписываем по алгоритму для случая комплексных корней:

$$\overline{x}(t) = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\overline{\omega}t + C_2 \sin\overline{\omega}t)$$

или (см. задачу 2.4):

$$\overline{x}(t) = \overline{A}e^{-\alpha t}\cos(\overline{\omega}t - \overline{\varphi}). \tag{5.11}$$

Здесь C_1, C_2 в предыдущем уравнении и $\overline{\alpha}$ и $\overline{\varphi}$ в последнем суть постоянные величины, которые следует определить из начальных условий, черта над x – обозначение решения однородного уравнения.

Выражение (5.11) показывает, что $\overline{x}(t)$ представляет затухающие колебания с круговой частотой $\overline{\omega}$ и убывающей амплитудой, равной $\overline{A}e^{-\alpha t}(\alpha > 0)$.

Если $\alpha \ll \omega_0$, то $\overline{\omega} \simeq \omega_0$; в идеальном случае, когда отсутствует трение ($\alpha = 0$) или электрическое сопротивление ($\alpha = 0$), колебания будут происходить с частотой ω_0 (которую называют частотой свободных или собственных колебаний). Через некоторое время $t \gg \tau$, определяемое величиной $\tau = \dfrac{1}{\alpha}$, амплитуда затухающих колебаний станет весьма малой. Величину $\tau = \dfrac{1}{\alpha}$ называют *характерным временем затухания*. Например, при $t = 3\tau$ амплитуда составит всего несколько процентов от $\overline{A}$.

Неоднородные уравнения. Метод комплексных амплитуд

Предположим теперь, что имеется внешнее воздействие на систему, т.е. $f(t) \neq 0$, и поведение системы описывается неоднородным уравнением (5.5). Общее решение помимо слагаемого вида (5.11) будет содержать еще одно слагаемое, представляющее частное решение. Ограничимся случаем гармонических воздействий, когда свободный член зависит от времени по синусоидальному или косинусоидальному закону; например

$$F(t) = A\cos\omega t, \text{ где } A, \omega \text{ — положительные постоянные.} \qquad (5.12)$$

Гармоническая функция – разновидность квазимногочлена. Следовательно, для отыскания частного решения удобен метод неопределенных коэффициентов. Здесь будет применено видоизменение этого способа – так называемый ***метод комплексных амплитуд***, который основан на использовании комплексных квазимногочленов – комплексных функций одной действительной переменной следующего вида:

$$\hat{f}(t) = P_m(t)\, e^{\hat{\lambda}t}, \qquad (5.13)$$

где $P_m(t)$ – вещественный многочлен степени m, $\hat{\lambda} = \delta + i\omega$, – вообще говоря, комплексное характеристическое число квазимногочлена, δ и ω – действительные числа.

Функция $\hat{f}(t)$, как и всякое комплексное число, может быть записана в тригонометрической форме, если воспользоваться формулой Эйлера:

$$\hat{f}(t) = P_m(t)\, e^{\delta t}\cos\omega t + iP_m(t)\, e^{\delta t}\sin\omega t. \qquad (5.13а)$$

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что частное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и свободным членом (5.13) может быть найдено в виде комплексного квазимногочлена:

$$\hat{\gamma}(t) = t^s R_m(t)\, e^{\hat{\lambda}t}, \qquad (5.14)$$

где показатель степени s зависит от соотношения между числом $\hat{\lambda}$ и корнями характеристического уравнения. Если $\hat{\lambda}$ не совпадает ни с одним из корней, то s равно нулю, если имеются совпадения, то s равно кратности соответствующего корня;

$R_m(t)$ – многочлен степени m с неопределенными (в том числе и комплексными!) коэффициентами, которые определяют после подстановки $\hat{\gamma}(t)$ в исходное неоднородное уравнение, приравнивая сомножители при одинаковых степенях переменной t. Действительная

часть (5.14) – частные решения уравнения, свободный член которого есть действительная часть квазимногочлена (5.13); мнимая часть (5.14) представляет решение уравнения со свободным членом в виде мнимой части (5.13).

Алгоритм метода комплексных амплитуд сводится к следующей последовательности действий:

1) находят комплексный квазимногочлен, действительная (или мнимая) часть которого совпадает со свободным членом дифференциального уравнения;
2) записывают по формуле (5.14) комплексное частное решение;
3) после подстановки последнего в исходное уравнение определяют коэффициенты в многочлене $R_m(t)$.

Из найденного комплексного решения выделяют действительную (или мнимую) часть, которая и является искомым частным решением в виде вещественной функции.

Вынужденные колебания. Физический и математический резонансы

Перед использованием метода комплексных амплитуд обратим внимание на следующее обстоятельство: если внешнее воздействие на систему продолжается достаточно долго, то оно полностью определяет поведение системы. Математически это следует из того, что решение однородного уравнения (5.11) затухает, так что через некоторое время общее решение неоднородного уравнения практически совпадает с его частным решением, зависящим только от свободного члена, т.е. внешнего воздействия.

Положим теперь в уравнении (5.5):

$$f(t) = \frac{A}{m}\cos\omega t, \tag{5.15}$$

где A – амплитуда,

ω – циклическая частота внешней силы $F(t) = A\cos\omega t$.

Выражение (5.15) есть действительная часть комплексного квазимногочлена:

$$\hat{f}(t) = \frac{A}{m}e^{i\omega t}. \tag{5.16}$$

Очевидно, что в нашем случае, поскольку $\hat{\lambda} = i\omega$ и не равно ни одному из корней $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ характеристического уравнения, комплексное решение уравнения (5.5) следует искать в виде:

$$\hat{x}(t) = Ce^{i\omega t}. \tag{5.17}$$

Для определения постоянной C подставляем (5.17) в (5.5):

$$\ddot{\hat{x}} + 2\alpha\dot{\hat{x}} + \omega_0^2\hat{x} = Ce^{i\omega t}[-\omega^2 + 2\alpha i\omega + \omega_0^2] = \frac{A}{m}e^{i\omega t}. \tag{5.18}$$

Отсюда, после очевидного сокращения, находим:

$$C = \frac{A/m}{-\omega^2 + 2\alpha i\omega + \omega_0^2} = \frac{A}{m}\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\alpha\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\alpha\omega\right)^2}.$$

Искомое вещественное решение $\tilde{x}(t)$ есть действительная часть $\hat{x}(t)$:

$$\tilde{x}(t) = Re\left[Ce^{i\omega t}\right] = Re\left[\frac{A}{m}\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\alpha\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\alpha\omega\right)^2}\,(\cos\omega t + i\,\sin\omega t)\right] =$$
$$= \frac{A}{m}\,\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega\sin\omega t}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\alpha\omega\right)^2}.$$

Воспользуемся примером задачи 2.4 и введем более удобные константы a и φ по формулам:

$$\begin{aligned} a &= a(\omega) = \frac{A}{m}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\alpha\omega\right)^2}}; \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Тогда решение примет вид:

$$\tilde{x} = a\cos(\omega t - \varphi). \tag{5.20}$$

Объединяя (5.11) и (5.20), получаем общее решение (5.5):

$$x(t) = \bar{x} + \tilde{x} = \bar{a}e^{-\alpha t}\cos(\bar{\omega}t - \bar{\varphi}) + a\cos(\omega t - \varphi), \tag{5.21}$$

которое содержит постоянные $\bar{a}$ и $\bar{\varphi}$, определяемые из начальных условий. Предположим, что в начальный момент система покоилась:

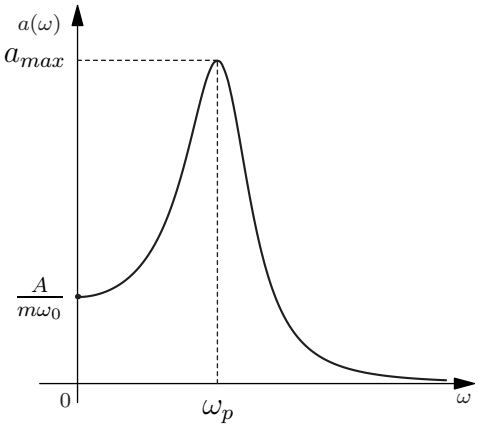
$$\begin{aligned} &x(0) = 0 \text{ и} \\ &\dot{x}(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

В этом случае после простых выкладок найдем:

$$\overline{a} = a\frac{\omega_0}{\overline{\omega}},$$
$$\operatorname{tg}\overline{\varphi} = \frac{\alpha}{\overline{\omega}}\,\frac{\omega_0^2+\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}. \tag{5.23}$$

Теперь в (5.21) известны все величины, и можно, например, проследить процесс перехода системы из состояния покоя к вынужденным колебаниям с частотой внешней силы ω. Амплитуда вынужденных колебаний $a = a(\omega)$ определяется выражением (5.19). График зависимости амплитуды колебаний от круговой частоты приведен на рис. 5.3.

Рис. 5.3



Из вида зависимости (5.19) амплитуды от круговой частоты ω приходим к выводу, что максимальное значение амплитуды – a_{max} – достигается при так называемой резонансной частоте ω_p, равной:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}.$$

Значение амплитуды a_{max} при частоте наступления резонанса $\omega = \omega_p$ нетрудно найти, подставив в (5.19) полученное здесь значение резонансной частоты ω_p. В результате подстановки получим, что максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний равно:

$$a_{max} = \frac{A}{m}\,\frac{1}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}}. \tag{5.24}$$

Во многих случаях представляет интерес не само решение, а его скорость $v = \dot{x}(t)$ (в электрическом контуре не заряд конденсатора, а сила тока в цепи). Ограничиваясь установившимся режимом колебаний, из (5.20) получим:

$$v = \dot{x}(t) = -a\omega \sin(\omega t - \varphi) = a\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \tag{5.25}$$

Скорость тела (сила тока) тоже будет совершать колебания с частотой вынуждающей силы. Ее амплитуда определяется равенством:

$$\begin{aligned} a_v = a\omega = \frac{A}{m} \frac{\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\alpha\omega\right)^2}} = \\ = \frac{A}{m} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \left[\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1\right)^2 + \left(2\alpha\right)^2\right]}}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Нетрудно убедиться, что для скорости тела (силы тока) резонанс возникает, когда частота вынуждающей силы совпадает с частотой свободных колебаний:

$$\begin{aligned} \omega_{pv} &= \omega_0, \\ a_{max\,v} &= \frac{A}{m} \frac{1}{2\alpha}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Помимо физического резонанса, т.е. явления, возникающего в реальной системе, обладающей затуханием, существуют представления о *математическом резонансе* как явлении, которое имело бы место, если бы существовала система без затухания. Для такой системы в уравнении (5.5) отсутствует первая производная, так как $\alpha = 0$:

$$\ddot{x} + x\omega_0^2 = f(t). \tag{5.28}$$

Проинтегрируем (5.28) в прежних предположениях относительно свободного члена и начальных условий [см. (5.15) и (5.22)]. Решение соответствующего однородного уравнения запишем в привычном для нас виде:

$$\overline{x}(t) = \overline{b} \cos(\omega_0 t - \overline{\varphi}), \tag{5.29}$$

здесь $\overline{b}$, $\overline{\varphi}$ — постоянные, которые в дальнейшем найдем, воспользовавшись начальными условиями.

Будем считать что $\omega \neq \omega_0$. В этом случае частное комплексное решение неоднородного уравнения будем по-прежнему искать в виде (5.17). Проделав несложные выкладки, найдем, что:

$$\tilde{x}(t) = b\cos\omega t, \text{ где } b = \frac{A}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{5.30}$$

Общее решение запишется в виде суммы (5.29) и (5.30):

$$x(t) = \bar{b}\cos(\omega_0 t - \bar{\varphi}) + b\cos\omega t. \tag{5.31}$$

Перейдем к определению констант $\bar{b}$, $\bar{\varphi}$. Из начальных условий следует, что:

$$\begin{aligned} x(0) &= \bar{b}\cos\bar{\varphi} + b = 0, \\ \dot{x}(0) &= b\omega_0 \sin\bar{\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Из (5.32) находим: $\bar{b} = b$, $\bar{\varphi} = -\pi$, так что (5.31) принимает вид:

$$x(t) = b(\cos\omega t - \cos\omega_0 t) = 2b\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right). \tag{5.33}$$

Выражение (5.33) содержит два осциллирующих множителя с сильно отличающимися частотами. Поскольку колебания с частотой $\frac{\omega_0 + \omega}{2}$ происходят много быстрее, можно рассматривать выражение $2b\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)$ как переменную амплитуду. Поведение системы, определяемое выражением (5.33), называется ***биениями***. Пусть теперь ω стремится к ω_0. Когда разность $\omega_0 - \omega$ станет достаточно малой, из (5.33) получим [следует воспользоваться значением b из (5.30) и замечательным пределом для раскрытия неопределенности]:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{2A}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right) = \\ &= \frac{A}{2m\omega_0}\, t\,\sin\omega_0 t. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Это и есть случай ***математического резонанса*** – размах колебаний возрастает со временем от нуля до бесконечно большой величины. [Заметим, что к результату (5.34) можно прийти и из выражения (5.21) для реальной системы, положив в начале $\alpha = 0$, а затем устремив ω к ω_0 . Есть еще один путь — решение уравнения (5.28) в предположении $\omega = \omega_0$. Частное решение тогда следует искать в виде $\hat{x} = tCe^{\omega_0 t}$, поскольку $\hat{\lambda}$ и корень характеристического уравнения совпадают.]

§ 6. Вариант контрольной работы по теме: «Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами»

Условия задач

6.1. Найти общее решение однородного уравнения:

$$y'''' + y'' = 0.$$

6.2. Найти общее решение неоднородного уравнения:

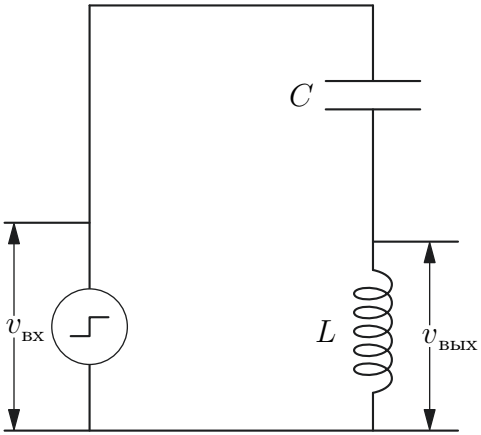
$$\ddot{x} + x = t \sin 2t.$$

6.3. Найти решение задачи Коши, используя метод импульсной функции:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = (t - T)\,\theta(t - T),$$
$$T = const > 0,$$
$$u(0) = 1,$$
$$\dot{u}(0) = 1.$$

6.4. Составить дифференциальное уравнение электрической цепи, изображенной на рис. 6.1, и найти выходное напряжение $v_{\text{вых}}$ на индуктивности, если на вход подан сигнал $v_{\text{вх}} = v_0 t\,\theta(t)$. В начальный момент времени $t = 0$ конденсатор не заряжен, и ток в цепи отсутствует.

Рис. 6.1



Решения задач 6.1–6.4.

Задача 6.1. Найти общее решение однородного уравнения:

$$y'''' + y'' = 0. \tag{1}$$

Решение

1. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0$$

и находим его корни

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \\ &\lambda_{3,4} = \pm i. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Записываем общее решение дифференциального уравнения согласно вышеуказанным правилам (двукратно вырожденный действительный корень и два комплексно сопряженных корня):

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x. \tag{3}$$

Задача 6.2. Найти общее решение неоднородного уравнения:

$$\ddot{x} + x = t \sin 2t.$$

Решение. Записываем общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения $\overline{x}(t)$ и частного решения неоднородного $\widetilde{x}(t)$:

$$x(t) = \overline{x}(t) + \widetilde{x}(t).$$

1. Найдем сначала общее решение однородного уравнения. Поскольку корни характеристического уравнения равны соответственно $\pm i$, то общее решение $\overline{x}(t)$ ищем в виде:

$$\overline{x}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t. \tag{1}$$

2. Частное решение неоднородного уравнения ищем методом неопределенных коэффициентов.

Исходя из вида свободного члена, полагаем:

$$\widetilde{x}(t) = (A_1 + A_2 t) \cos 2t + (B_1 + B_2 t) \sin 2t. \tag{2}$$

Затем вычисляем производные первого и второго порядков:

$$\widetilde{x}'(t) = A_2 \cos 2t - 2(A_1 + A_2 t)\sin 2t + B_2 \sin 2t + 2(B_1 + B_2 t)\cos 2t,$$
$$\widetilde{x}''(t) = -4A_2 \sin 2t - 4(A_1 + A_2 t)\cos 2t + 4B_2 \cos 2t - 4(B_1 + B_2 t)\sin 2t.$$

3. Подстановка этих выражений в исходное уравнение дает:

$$-4A_2 \sin 2t - 3(A_1 + A_2 t)\cos 2t + 4B_2 \cos 2t - 3(B_1 + B_2 t)\sin 2t = t \sin 2t.$$

4. Приравнивая коэффициенты при подобных членах слева и справа от знака равенства, получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} -3A_1 + 4B_2 = 0 \\ -4A_2 - 3B_1 = 0 \\ -3A_2 = 0 \\ -3B_2 = 1 \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид:

$$A_1 = -\frac{4}{9},$$
$$A_2 = 0,$$
$$B_1 = 0,$$
$$B_2 = -\frac{1}{3}.$$

Подставляя найденные значения постоянных в выражение (2), получим частное решение неоднородного уравнения:

$$\widetilde{x}(t) = -\frac{4}{9}\cos 2t - \frac{t}{3}\sin 2t;$$

5. Общее решение исходного уравнения запишется так:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{4}{9}\cos 2t - \frac{t}{3}\sin 2t.$$

Задача 6.3. Найти решение задачи Коши, используя метод импульсной функции:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = (t - T)\,\theta(t - T),$$
$$T = const > 0,$$
$$u(0) = 1,$$
$$\dot{u}(0) = 1.$$

Решение. Неоднородный член обозначим как $f(x)$ и по определению единичной функции $\theta(x-\overline{x})$ (4.9) получим

$$f(t) = (t-T)\,\theta(t-T) = \begin{cases} 0, & t < T \\ (t-T), & t \geq T. \end{cases}$$

Представим общее решение данного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$u(t) = \overline{u}(t) + \widetilde{u}(t).$$

1. Находим по общим правилам решение однородного уравнения $\overline{u}(t)$:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0.$$

Корни характеристического уравнения легко находятся и равны:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения можно записать как:

$$\overline{u}(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t. \qquad (1)$$

2. Далее действуем в соответствии с алгоритмом построения импульсной функции. Напомним, что импульсная функция является решением однородного уравнения и удовлетворяет специальным начальным условиям (в качестве аргумента выбираем переменную $s = t - \xi$):

$$K(s=0) = 0,$$
$$\dot{K}(s=0) = 1.$$

Используя полученное выше общее решение (1) однородного уравнения, представим искомую импульсную функцию в виде:

$$K(s) = c_1 \cos\omega s + c_2 \sin\omega s. \qquad (2)$$

Используя начальные условия, составим систему уравнений для определения констант c_1 и c_2:

$$K(0) = c_1 = 0$$

и

$$\dot{K}(0) = \omega\, c_2 = 1 \;\Rightarrow\; c_2 = \frac{1}{\omega}.$$

Подстановка найденных значений констант в (2) приводит к следующему выражению для импульсной функции:

$$K(t-\xi)=\frac{\sin\omega(t-\xi)}{\omega}.$$

3. Ищем теперь частное решение неоднородного уравнения $\widetilde{u}(t)$, воспользовавшись формулой (4.4) (здесь мы заменили обозначение x на t):

$$\widetilde{u}(t)=\int_{t_0}^{t}K(t-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

В нашем случае $t_0=0$ (начальные условия заданы в нулевой момент времени). Затем рассматриваем моменты времени $t<T$. Неоднородный член $f(\xi)$ при этих значениях аргумента равен нулю. Из этого делаем вывод, что

$$\widetilde{u}(t)\equiv 0 \text{ при } t<T.$$

В области значений $t\geq T$ будем иметь:

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(t)&=\int_{t_0}^{t}K(t-\xi)f(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\omega}\int_{T}^{t}\sin\omega(t-\xi)\times(\xi-T)\,d\xi=\\&=\frac{1}{\omega}\int_{T}^{t}\xi\sin\omega(t-\xi)\,d\xi-\frac{T}{\omega}\int_{T}^{t}\sin\omega(t-\xi)\,d\xi=\\&=\frac{1}{\omega^2}\left[t-T-\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-T)\right].\end{aligned}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$\widetilde{u}(t)=\begin{cases}0, & t<T\\ \dfrac{1}{\omega^2}\left(t-T-\dfrac{1}{\omega}\sin\omega(t-T)\right), & t\geq T.\end{cases}$$

4. Записываем общее решение при $t\geq T$:

$$u(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+\widetilde{u}(t).$$

Коэффициенты c_1 и c_2 определяем, исходя из начальных условий $\overline{u}(0)=0$, $\dot{\overline{u}}(0)=1$:

$$\begin{aligned}&\overline{u}(0)=c_1=0,\\&\overline{u}'(0)=\omega c_2=1\ \Rightarrow\ c_2=\frac{1}{\omega}.\end{aligned}$$

Итак, решение поставленной задачи можно представить в форме:

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin \omega t}{\omega}, & t < T \\ \dfrac{\sin \omega t}{\omega} + \dfrac{1}{\omega^2}\left(t - T - \dfrac{1}{\omega}\sin \omega (t-T)\right), & t \geq T. \end{cases}$$

Задача 6.4. Составить дифференциальное уравнение электрической цепи, изображенной на рис. 6.1, и найти выходное напряжение $v_{\text{вых}}$ на индуктивности, если на вход подан сигнал $v_{\text{вх}} = v_0 t\,\theta(t)$. В начальный момент времени $t = 0$ конденсатор не заряжен, и ток в цепи отсутствует.

Решение. Начальные условия запишем в виде

$$q(0) = 0,$$
$$\frac{dq(0)}{dt} = 0.$$

1. Составляем дифференциальное уравнение. По закону Кирхгофа сумма напряжений на индуктивности и емкости равна напряжению входного сигнала, т.е.:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = v_{\text{вх}}(t),$$

где q – заряд емкости, а $I = \dfrac{dq}{dt}$ ток в цепи. Переходя в этом уравнении к заряду, получим:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = v_{\text{вх}}(t),$$

Делим обе части уравнения на L и вводим обозначение $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. В результате получаем искомое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \frac{v_0}{L} t \times \theta(t).$$

Записываем решение, как мы уже не раз поступали, в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$q(t) = \overline{q}(t) + \widetilde{q}(t).$$

2. Затем находим общее решение однородного уравнения:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0,$$

корни характеристического уравнения которого имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Общее решение теперь запишем как:

$$\overline{q}(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

3. Частное решение $\widetilde{q}(t)$ построим методом импульсной функции. Поскольку однородное уравнение для $q(t)$ имеет тот же вид, что и в **задаче 6.3**, можно воспользоваться найденным в этой задаче выражением для импульсной функции:

$$K(t, \xi) = \frac{\sin \omega (t - \xi)}{\omega}.$$

В таком случае на основании общей теории воспользуемся выражением (4.4) для частного решения неоднородного уравнения. Очевидно, что при значениях $t < 0$ частное решение будет равно нулю, а при $t \geq 0$ получим, что

$$\widetilde{q}(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, \xi)\, f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\omega} \int_{0}^{t} \sin \omega (t - \xi)\, \frac{v_0}{L} \xi\, d\xi = \frac{V_0}{\omega^2 L} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right).$$

Итак, мы получили следующее выражение для частного решения:

$$\widetilde{q}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{V_0}{\omega^2 L} \left(t - \dfrac{\sin \omega t}{\omega} \right), & t \geq 0. \end{cases}$$

4. Общее решение исходного дифференциального уравнения при $t \geq 0$ запишется так:

$$q(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{V_0}{\omega^2 L} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right).$$

Для определения констант c_1 и c_2 обратимся к начальным условиям, из которых следуют уравнения:

$$\begin{aligned} q(0) &= c_1 = 0, \\ \dot{q}(0) &= \omega c_2 = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{q}(t) \equiv 0$ и поэтому:

$$q(t) = \widetilde{q}(t).$$

Окончательное решение поставленной задачи представим как:

$$v_{\text{вых}} = L\frac{dI}{dt} = L\ddot{q} = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \text{ для } t \geq 0,$$

или, используя θ-функцию:

$$v_{\text{вых}} = \left(\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\right)\theta(t).$$

Вариант для подготовки к контрольной работе

6.5. Проинтегрировать однородное уравнение:

$$y^{(5)} + 9y^{(3)} = 0.$$

6.6. Найти общее решение неоднородного уравнения:

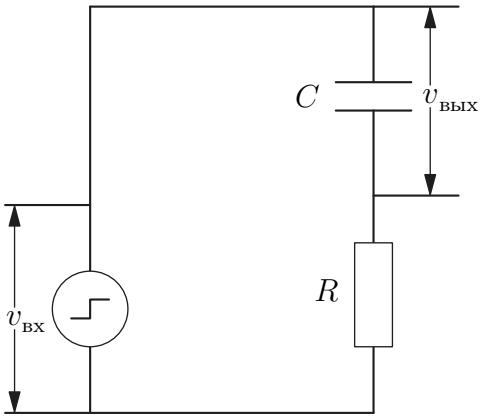
$$\ddot{x} + 4x = \cos 2t.$$

6.7. Решить задачу Коши; применить метод импульсной функции:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \theta(t)\sin\omega t,$$
$$u(0) = 1,$$
$$\dot{u}(0) = 0.$$

6.8. Определить напряжение на емкости в электрической цепи (рис. 6.2), если на вход подан сигнал $v_{\text{вх}} = v_0 t\,\theta(t)$. В начальный момент времени $t = 0$ конденсатор не заряжен, и ток в цепи отсутствует.

Рис. 6.2



Часть 3. Краевые задачи

§ 7. Однородные уравнения. Проблема Штурма–Лиувилля

Необходимые сведения

Проблема Штурма–Лиувилля – это задача отыскания нетривиального решения однородного линейного дифференциального уравнения с ***переменными коэффициентами***

$$(ky')' - qy + \lambda\rho y = 0 \tag{7.1}$$

при однородных краевых условиях:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ &\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Здесь $k = k(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, а $q = q(x)$, $\rho = \rho(x)$ – непрерывные функции в интервале $a \le x \le b$, причем $k, \rho > 0$, $q \ge 0$; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – заданные числа, а λ – число, которое определяют в процессе решения.

Подобные задачи возникают, в частности, в квантовой механике и задачах математической физики.

Анализ задач (7.1), (7.2) показывает, что ***нетривиальное*** (т.е. не равное нулю тождественно) решение существует лишь при определенных, так называемых ***собственных значениях λ***.

Каждому такому числу λ_k (а их может быть бесконечно много: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_k \ldots$) соответствует *частное решение* уравнения (7.1), удовлетворяющее краевым условиям (7.2), именуемое *собственной функцией* – $y_k(x)$.

Собственные значения и собственные функции имеют следующие важные свойства.

1) λ_k и $y_k(x)$ образуют *счетные* множества, причем $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_k \ldots$.
2) При $q(x) \ge 0$, $\lambda_k > 0$;
3) Собственные функции, принадлежащие разным собственным значениям, *ортогональны* на отрезке (a, b) с весом ρ. Ортогональность означает, что при $m \ne n$ выполняется равенство:

$$\int_a^b y_n(x)\, y_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0.$$

4) *Произвольная*, дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ *всегда может быть представлена рядом* (теорема В.А. Стеклова):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \tag{7.3}$$

который сходится равномерно и абсолютно; коэффициенты f_n в этом разложении определяются по формулам:

$$f_n = \frac{\int_a^b f(x)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx}{\int_a^b y_n^2(x)\, \rho(x)\, dx}. \tag{7.4}$$

Далее будут рассмотрены простые варианты задачи Штурма–Лиувилля, когда

$$\begin{aligned} &k = 1, \\ &q = 0, \\ &\rho = const, \\ &\beta_1 = \beta_2 = 0, \end{aligned}$$

так что из (7.1), (7.2) получим:

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda \rho y = 0, \\ &y(a) = y(b) = 0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

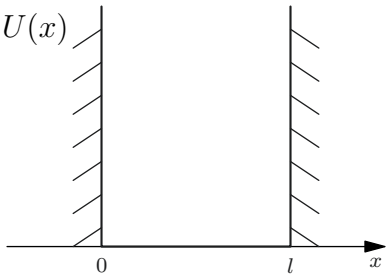
Примеры решений задач

Задача 7.1. Найти возможные значения энергии E и волновые функции микрочастицы, помещенной в одномерный потенциальный ящик с непроницаемыми стенками (рис. 7.1): $0 \le x \le l$.

Решение. В соответствии с условием задачи полагаем, что потенциальная энергия микрочастицы распределена следующим образом:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x \le 0 \\ 0, & 0 < x < l \\ +\infty, & x \ge l. \end{cases}$$

Рис. 7.1



Запишем одномерное стационарное уравнение Шредингера:

$$\frac{d^2\psi}{d^2x} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi = 0, \qquad (1)$$

где $\psi = \psi(x)$ – волновая функция, E – энергия, m — масса микрочастицы, $\hbar$ – постоянная Планка.
В области $0 < x < l$ уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d^2\psi}{d^2x} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0. \qquad (2)$$

Так как частица не может преодолеть бесконечно высокий потенциальный барьер, то естественно положить значения волновой функции на границах области равными нулю:

$$\psi(0) = 0,$$
$$\psi(l) = 0.$$

Введем в (2) обозначение:

$$\lambda = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

В результате приходим к ***задаче Штурма–Лиувилля*** – найти нетривиальные решения уравнения:

$$\frac{d^2\psi}{d^2x} + \lambda\psi = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\psi(0) = 0,\\ &\psi(l) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $\lambda < 0$, тогда корни характеристического уравнения будут действительными числами. Общее решение уравнения (3) в этом случае будет иметь вид:

$$\psi(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Произвольные постоянные определим из условий (4):

$$\begin{cases} \psi(0) = C_1 + C_2 = 0,\\ \psi(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = -C_1,\\ 2\,C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}\,l) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $C_1 = 0$, следовательно, и $C_2 = 0$. Таким образом, $\psi(x) \equiv 0$, т.е. в области отрицательных λ нетривиальных решений нет.

2. При $\lambda = 0$ корень характеристического уравнения двукратно вырожден. Общее решение уравнения (3), согласно правилам § 1, определится выражением:

$$\psi(x) = C_1 + C_2 x.$$

Используя граничные условия (4), найдем C_1 и C_2:

$$\begin{cases} \psi(0) = C_1 = 0,\\ \psi(l) = C_2 l = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\psi(x) \equiv 0$, т.е. при $\lambda = 0$ нетривиальных решений также нет.

3. Рассмотрим условие $\lambda > 0$. Корни характеристического уравнения в этом случае мнимые. Общее решение уравнения (3) запишем в виде:

$$\psi(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x. \tag{5}$$

Произвольные постоянные, определим из граничных условий (4):

$$\begin{cases} \psi(0) = C_1 = 0, \\ \psi(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, l = 0. \end{cases}$$

Если $C_2 = 0$, то решение будет тривиальным. Поэтому потребуем, чтобы ($\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$). Тогда очевидно: $\sqrt{\lambda}\, l = \pi k$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. При $k = 0$ имеем $\lambda = 0$, т.е. тривиальное решение, поэтому $k = 0$ исключаем из рассмотрения. Из этого делаем вывод, что

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \; k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{6}$$

Итак, мы имеем *последовательность собственных чисел λ_k. Каждому λ_k соответствует единственная собственная функция $\psi_k(x)$:*

$$\psi_k(x) = C_k \sin \frac{\pi k}{l} x, \; k = 1, 2, 3, \ldots ,$$

что следует из выражения (5), если учесть, что $C_1 = 0$ и $\sqrt{\lambda_k} = \dfrac{\pi k}{l}$. Задача имеет бесчисленное множество решений, но число их счетно. Уровни энергии, согласно (6), равны:

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2.$$

Постоянные C_k определяются из *условия нормировки* волновой функции, которое утверждает, что вероятность нахождения частицы внутри области $0 < x < l$ равна единице:

$$\int_0^l |\psi_k(x)|^2 \, dx = 1,$$

и, так как $\psi_k(x) = C_k \sin \dfrac{\pi k}{l} x$, придем к уравнению для множителя C_k:

$$C_k^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi k}{l} x \, dx = 1.$$

Интеграл легко вычисляется:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi k}{l} x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^l dx - \frac{1}{2}\int_0^l \cos \frac{\pi k}{l} x\, dx = \frac{l}{2},$$

и, принимая во внимание это значение, из предыдущего уравнения находим, что

$$C_k = \sqrt{\frac{2}{l}},$$

т.е. коэффициенты C_k не зависят от k. Таким образом, нормированные на единицу волновые функции имеют вид:

$$\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k}{l} x.$$

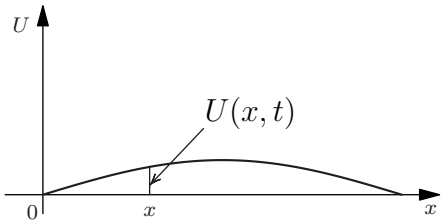
Задача 7.2. Рассмотреть движение струны длиной l, закрепленной на концах.

Уравнение для отклонения u участка струны с координатой x в момент времени t от положения равновесия имеет вид (рис. 7.2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $u = u(t, x)$, $a = \dfrac{T}{\rho}$, T — величина созданного в струне натяжения; ρ — линейная плотность материала струны.

Рис. 7.2



По условию задачи на концах струны выполняются граничные условия:

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \tag{2}$$

Кроме этого, зададим форму струны $f_1(x)$ и скорость ее точек $f_2(x)$ в момент времени $t = 0$; так называемые *начальные условия:*

$$\begin{aligned} &u(0, x) = f_1(x), \\ &\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = u'_t(0, x) = f_2(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде произведения функций времени и координаты:

$$U(x,t) = X(x)\,T(t). \tag{4}$$

Подставив (4) в уравнение (1), получим:

$$T''(t)\,X(x) = a^2\,T(t)\,X''(x)$$

или, после деления на $a^2T(t)X(x)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5}$$

Для того чтобы функция (4) была решением уравнения (1), равенство (5) должно удовлетворять всем значениям независимых переменных $0 < x < l$ и $t > 0$.

Правая часть (5) является функцией переменной x, а левая – t, поэтому *равенство может быть выполнено, только если левая и правая части при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение*. Обозначим его $(-\lambda)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\,\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda. \tag{6}$$

Из соотношения (6) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda x &= 0,\\ T'' + \lambda a^2 T &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

В граничные условия (2) подставим (4). В результате найдем, что должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned} T(t)\,X(0) &= 0,\\ T(t)\,X(l) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0,\\ X(l) &= 0, \end{aligned}$$

так как иначе имели бы, что $T(t) \equiv 0$ и $u(x,t) \equiv 0$. Таким образом, для определения функции $X(x)$ необходимо решить задачу в следующей

постановке: найти значение параметра λ, при котором существуют нетривиальные решения однородного уравнения:

$$X'' + \lambda X = 0,$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$X(0) = X(l) = 0,$$

а также найти сами решения. Это и есть ***задача Штурма–Лиувилля***.

Воспользуемся результатами задачи (7.1) и сразу запишем значения собственных чисел λ:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{8}$$

Этим числам соответствуют собственные функции:

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \ n = 1, 2, 3, \ldots , \tag{9}$$

определяемые с точностью до произвольного множителя A_n.

Подставив (8) в (7), найдем уравнение для функции времени:

$$T'' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T = 0. \tag{10}$$

Это однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами; соответствующее ему характеристическое уравнение имеет мнимые корни. Если ввести обозначение

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l}, \ n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

то общее решение (10) запишется в виде:

$$T_n(t) = \alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t. \tag{11}$$

Из (9), (11) и (4) получим частные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям:

$$u_n(x, t) = T_n X_n = \left(\overline{\alpha}_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + \overline{\beta}_n \sin \frac{\pi n a}{l} t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где $\overline{\alpha}_n = \alpha_n A_n, \overline{\beta}_n = \beta_n A_n$.

Окончательное решение задачи будем искать в виде *линейной комбинации* $u_n(x,t)$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{\alpha}_n\cos\frac{\pi na}{l}t+\overline{\beta}_n\sin\frac{\pi na}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (12)$$

Коэффициенты $\overline{\alpha_n}, \overline{\beta_n}$ определим из начальных условий:

$$\begin{aligned} u(0,x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\alpha}_n\sin\frac{\pi n}{l}x=f_1(x),\\ u_t'(0,x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\beta}_n\frac{\pi na}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x=f_2(x)\end{aligned} \qquad (13)$$

Согласно теореме В.А. Стеклова [см. (7.3) и (7.4)], каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ может быть разложена по собственным функциям $X_n=\sin\dfrac{\pi nx}{l}$:

$$\begin{aligned} f_1(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}f_{1n}\sin\frac{\pi nx}{l},\\ f_2(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}f_{2n}\sin\frac{\pi nx}{l},\end{aligned} \qquad (14)$$

где коэффициенты разложения f_{1n} и f_{2n} вычисляются по формуле (7.4).

Сравнивая (13) и (14), видим:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_n&=f_{1n},\\ \overline{\beta}_n&=\frac{l}{\pi na}f_{2n}.\end{aligned} \qquad (15)$$

Пусть, например, в начальный момент времени струна имеет форму:

$$f_1(x)=A\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (16)$$

и все ее точки покоятся:

$$f_2(x)=0. \qquad (17)$$

Тогда $\overline{\alpha}_1=f_{11}=A$, $\overline{\alpha}_2=\overline{\alpha}_3=\ldots=0$, $\overline{\beta}_1=\overline{\beta}_2=\ldots=0$. Решением уравнения (1) при начальных условиях (16) и (17) будет функция:

$$u(x,t)=A\cos\frac{\pi at}{l}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

§ 8. Неоднородные уравнения. Функция Грина

Необходимые сведения

Подобно тому, как это было в случае задачи Коши для неоднородного уравнения (см. § 4), решение краевой задачи для неоднородного уравнения также может быть представлено в виде интеграла, содержащего свободный член и специальную функцию. Последнюю называют **функцией Грина** (или функцией влияния).

Отметим, что, хотя в дальнейшем речь пойдет о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка, соответствующая интегральная формула имеет место и в более общем случае.

Напомним, что задача с неоднородными краевыми условиями может быть сведена к задаче с однородными краевыми условиями и что рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с непрерывными коэффициентами и свободным членом.

Таким образом, последующие сведения относятся к достаточно большому числу краевых задач. Символы (I) и (II) означают далее производные первого и второго порядков. Задача ставится следующим образом: требуется найти решение неоднородного уравнения

$$\left(ky^{(I)}\right)^{(I)} - qy = f(x), \tag{8.1}$$

на интервале (a, b), удовлетворяющее однородным краевым условиям:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y^{(I)}(a) = 0, \tag{8.2}$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y^{(I)}(b) = 0. \tag{8.3}$$

Оказывается, решение может быть представлено в интервале (a, b) формулой:

$$y(x) = \int_a^b Y(x, \theta)\, f(\theta)\, d\theta. \tag{8.4}$$

В этих формулах $k = k(x)$ непрерывно дифференцируема, $q = q(x)$ и $f(x)$ – непрерывные в интервале (a, b) функции; ξ – произвольная точка интервала (рис. 8.1); $Y(x, \xi)$ – функция Грина, построение которой обсуждается ниже; α_m, β_m $(m = 1, 2)$ – заданные числа.

Если однородное уравнение, соответствующее (8.1):

$$\left(ky^{(I)}\right)^{(I)} - qy = 0 \tag{8.5}$$

при условиях (8.2) имеет только **тривиальное решение** (т.е. $y \equiv 0$), то отыскание функции Грина *наиболее простое и она обладает следующими свойствами:*

1) как функция x $Y(x,\xi)$ есть решение однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному, везде на (a,b), за исключением точки $x=\xi$;
2) в точке $x=\xi$ функция Грина непрерывна:

$$Y(\xi+0,\xi)=Y(\xi-0,\xi), \tag{8.6}$$

а ее производная меняется скачком, который равен $\dfrac{1}{k(\xi)}$:

$$Y_x^{(I)}(\xi+0,\xi)-Y_x^{(I)}(\xi-0,\xi)=\frac{1}{k(\xi)}; \tag{8.7}$$

3) $Y(x,\xi)$ удовлетворяет краевым условиям.
Нетрудно убедиться, например, что в задаче

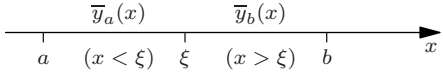
$$\begin{aligned} &y^{(II)}+y=0,\\ &y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{aligned} \tag{8.8}$$

имеется только тривиальное решение, и, следовательно, в этом случае функция влияния имеет указанные свойства.

Алгоритм отыскания функции Грина $Y(x,\xi)$ следующий:

1) решают однородное уравнение (8.4) и записывают его решение $\overline{y}_a(x)$ и $\overline{y}_b(x)$ для интервалов слева и справа от точки ξ (рис. 8.1):

Рис. 8.1



Поскольку интегрируется уравнение второго порядка, каждое из решений $\overline{y}_a(x)$ и $\overline{y}_b(x)$ содержит по две произвольные константы (A_1,A_2) и (B_1,B_2) [см. (0.4)];
2) удовлетворяют краевым условиям (8.2), что приводит к уравнениям относительно произвольных постоянных:

$$\alpha_1\overline{y}_a(a)+\beta_1\overline{y}_a^{(I)}(a)=0, \tag{8.9}$$

$$\alpha_2\overline{y}_b(b)+\beta_2\overline{y}_b^{(I)}(b)=0 \tag{8.10}$$

(в результате остаются только две неизвестные постоянные из их общего числа, равного четырем);
3) «сшивают» согласно (8.6) и (8.7) решения и их производные в точке $x=\xi$:

$$\begin{aligned} &\overline{y}_a(\xi) = \overline{y}_b(\xi), \\ &\overline{y}_b^{(I)}(\xi) - \overline{y}_a^{(I)}(\xi) = \frac{1}{k(\xi)}, \end{aligned} \tag{8.11}$$

что дает еще два уравнения для определения констант, которые зависят от ξ.

По найденным таким образом решениям $\overline{y}_a$ и $\overline{y}_b$ вычисляют функцию Грина по правилу:

$$Y(x,\xi) = \begin{cases} \overline{y}_a(x,\xi), & x \le \xi \\ \overline{y}_b(x,\xi), & x \ge \xi. \end{cases} \tag{8.12}$$

Более сложный способ отыскания функции Грина, когда решение уравнения (8.4) нетривиальное, здесь не рассматривается.

Примеры решений задач

Задача 8.1. Построить функцию Грина для уравнения

$$y^{(II)} = f(x) \tag{1}$$

и граничных условий

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

Решение. Убедимся вначале, что однородное уравнение, соответствующее исходному неоднородному уравнению, имеет только тривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям (2).
Как следует из (1), однородное уравнение имеет вид:

$$y^{(II)} = 0, \tag{3}$$

общее решение которого, согласно известным правилам его построения, есть:

$$\overline{y} = C_1 x + C_2. \tag{4}$$

Из граничных условий (2) находим, что:

$$C_1 = C_2 = 0. \tag{5}$$

Таким образом, уравнение (2) имеет только тривиальное решение:

$$\overline{y} = 0. \tag{6}$$

Для построения функции Грина следует записать решение уравнения (3) в каждом из интервалов $(0, \xi)$ и $(\xi, 1)$ со своими произвольными константами:

$$\begin{aligned} \overline{y}_a &= A_1 x + A_2 \ (0 \le x \le \xi), \\ \overline{y}_b &= B_1 x + B_2 \ (\xi \le x \le 1). \end{aligned} \tag{7}$$

Для определения неизвестных постоянных воспользуемся для начала граничными условиями (2):

$$\begin{aligned} &\overline{y}_a(0) = A_2 = 0, \\ &\overline{y}_b(1) = B_1 + B_2 = 0 \ \Rightarrow \ B_2 = -B_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя найденные значения постоянных в (7), получим:

$$\begin{aligned} \overline{y}_a(x) &= A_1 x, \\ \overline{y}_b(x) &= B_1 (x - 1). \end{aligned} \tag{9}$$

Воспользовавшись условием непрерывности функции влияния (8.6) и условием величины скачка ее первой производной (8.7) в точке $x = \xi$, составим уравнения для определения коэффициентов A_1, B_1:

$$\begin{aligned} &\overline{y}_a(\xi) = \overline{y}_b(\xi) \;\Rightarrow\; A_1\xi = B_1(\xi - 1), \\ &\overline{y}_b^{(I)}(\xi) - \overline{y}_a^{(I)}(\xi) = 1 \;\Rightarrow\; B_1 - A_1 = 1. \end{aligned} \tag{10}$$

[В (10) учтено, что $k(\xi) = 1$!] Из (10) находим значения искомых коэффициентов:

$$\begin{aligned} A_1 &= \xi - 1, \\ B_1 &= \xi \end{aligned} \tag{11}$$

и далее, в соответствии с (8.12), строим функцию Грина:

$$Y(x,\xi) = \begin{cases} (\xi - 1)\,x, & x \le \xi \\ \xi\,(x - 1), & x \ge \xi. \end{cases} \tag{12}$$

Задача 8.2. Построить функцию Грина для уравнения

$$y^{(II)} - y = f(x)$$

и граничных условий

$$\begin{aligned} &y^{(I)}(0) = 0, \\ &y^{(I)}(2) + y(2) = 0. \end{aligned}$$

Решение. Однородное уравнение, отвечающее данному неоднородному уравнению, имеет вид:

$$y^{(II)} - y = 0.$$

Его решение легко находится по правилам §1:

$$\overline{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \tag{1}$$

Нетрудно самостоятельно проверить, что однородное уравнение, соответствующее исходному неоднородному, имеет только тривиальное решение, удовлетворяющее указанным граничным условиям. Поэтому переходим к построению функции Грина.

Запишем решения вида (1) в каждом из интервалов $(0,\xi)$ и $(\xi,2)$ со своим набором постоянных:

$$\begin{aligned} &\overline{y}_a(x) = A_1 e^x + A_2 e^{-x} \;(0 \le x \le \xi), \\ &\overline{y}_b(x) = B_1 e^x + B_2 e^{-x} \;(\xi \le x \le 2). \end{aligned}$$

Из граничных условий следуют соотношения:

$$\overline{y}_a^{(I)}(0) = A_1 - A_2 = 0 \;\Rightarrow\; A_1 = A_2,$$
$$\overline{y}_b^{(I)}(2) + \overline{y}_b(2) = B_1 e^2 - B_2 e^{-2} + B_1 e^2 + B_2 e^{-2} = 2B_1 e^2 = 0 \;\Rightarrow\; B_1 = 0,$$

и, как следствие этих соотношений, получаем:

$$\overline{y}_a(x) = A_1(e^x + e^{-x}) \;(0 \le x \le \xi),$$
$$\overline{y}_b(x) = B_2 e^{-x} \;(\xi \le x \le 2).$$

Воспользовавшись условием непрерывности функции влияния (8.6) и условием величины скачка ее первой производной (8.7) в точке $x = \xi$, составим уравнения для определения коэффициентов A_1, B_2:

$$A_1(e^{\xi} + e^{-\xi}) = B_2 e^{-\xi},$$
$$-B_2 e^{-\xi} - A_1(e^{\xi} - e^{-\xi}) = 1.$$

Решая эту систему уравнений, находим A_1, B_2:

$$A_1 = -\frac{1}{2}e^{-\xi},$$
$$B_2 = -\frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2} = -\operatorname{ch}\xi.$$

Наконец, в соответствии с (8.12) строим функцию Грина:

$$Y(x,\xi) = \begin{cases} -e^{-\xi}\operatorname{ch} x & (0 \le x \le \xi) \\ -e^{-x}\operatorname{ch}\xi & (\xi \le x \le 2). \end{cases}$$

§ 9. Некоторые задачи электростатики

Необходимые сведения

Этот раздел посвящен задачам электростатики, представляющим интерес для биофизических и биохимических приложений. В задачах требуется найти потенциал электрического поля $\varphi = \varphi(x, y, z)$, который, как известно, есть решение ***уравнения Пуассона***:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{9.1}$$

здесь Δ – оператор Лапласа, $\rho = \rho(x, y, z)$ – объемная плотность электрического заряда, ε – диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 – электрическая постоянная (равная $8{,}85 \times 10^{-12}$ ф/м).

В тех областях пространства, где заряды отсутствуют, уравнение Пуассона превращается в ***уравнение Лапласа***:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{9.2}$$

По известному электрическому потенциалу вектор ***напряженности поля*** $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ вычисляют по формуле:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{9.3}$$

Граничные условия на границах двух сред в общем случае выводятся как следствие электростатической *теоремы Гаусса*:

$$\oint_s (\boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s}) = \oint_s (\boldsymbol{D}\, \boldsymbol{n})\, ds = q \tag{9.4}$$

и условия независимости работы сил электростатического поля от формы пути интегрирования. В рассмотренных ниже частных задачах нам понадобится лишь утверждение (9.4). Наконец, $(\boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s})$ и $(\boldsymbol{D}\, \boldsymbol{n})$ являются скалярными произведениями указанных в скобках векторов.

В (9.4) S – замкнутая поверхность, q – заряд в объеме, ограниченном этой поверхностью, $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}\, ds$ – векторный элемент поверхности и $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности интегрирования, $\boldsymbol{D}$ – вектор *электрической индукции*, связанный с вектором напряженности электрического поля в изотропной среде соотношением:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E}. \tag{9.5}$$

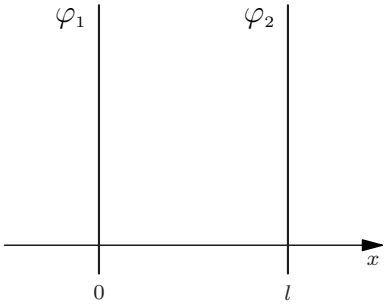
Во всем объеме проводника потенциал имеет постоянное значение. Внутри проводника объемная плотность зарядов, как и напряженность электрического поля, равны нулю. Заряд же, сообщенный проводнику, размещается на поверхности последнего.

Из (9.1) видно, что уравнение Пуассона – это дифференциальное уравнение в частных производных. Существенный момент в процессе решения такого уравнения в простейших задачах – переход к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Здесь собраны одномерные задачи, в которых потенциал зависит только от одной из координат или от расстояния до начала координат, вследствие чего исходное уравнение в частных производных переходит в одно обыкновенное дифференциальное уравнение.

Примеры решений задач

Задача 9.1. Найти зависимость потенциала от координат в плоском конденсаторе, если расстояние между пластинами l, а их потенциалы – φ_1 и φ_2 (рис. 9.1).

Рис. 9.1



Решение. В пространстве между пластинами конденсатора плотность заряда равна нулю ($\rho = 0$). Естественно предположить, что потенциал зависит лишь от одной переменной x, т.е. $\varphi = \varphi(x)$. Электрический потенциал является решением уравнения Лапласа (9.2), которое в нашем случае принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0. \tag{1}$$

Согласно условию задачи запишем граничные условия:

$$\begin{aligned} &\varphi(0) = \varphi_1, \\ &\varphi(l) = \varphi_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Далее находим общее решение уравнения (1):

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 x. \tag{3}$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (2):

$$\varphi(0) = C_1 = \varphi_1, \tag{4}$$

$$\varphi(l) = C_1 + C_2 l = \varphi_2 \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l}. \tag{5}$$

Подставляя (4), (5) в (3), получим зависимость потенциала от координаты:

$$\varphi(x) = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l} x. \tag{6}$$

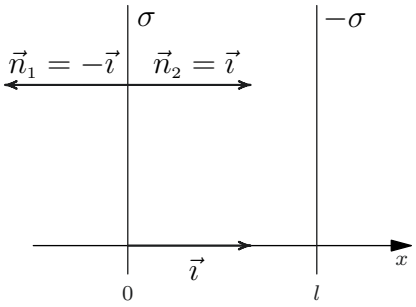
Следовательно, в плоском конденсаторе потенциал линейно зависит от координаты. Вектор напряженности электрического поля вычисляем по формуле (9.3):

$$\boldsymbol{E} = -\frac{d\varphi}{dx}\boldsymbol{i} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}\boldsymbol{i},$$

здесь $\boldsymbol{i}$ – единичный базисный вектор, направленный вдоль положительного направления оси x.

Задача 9.2. Задана поверхностная плотность зарядов на пластинах плоского конденсатора $\sigma > 0, -\sigma$ (рис. 9.2). Определить зависимость потенциала от координаты.

Рис. 9.2



Решение. Установим сначала вид граничных условий на поверхности раздела двух сред. Обратимся с этой целью к электростатической теореме Гаусса (9.4) и рис. 9.2. Выделим на поверхности левой пластинки площадку ΔS и построим на ней цилиндр с образующими, перпендикулярными поверхности. Ограничим его плоскостями, параллельными ΔS и расположенными как внутри, так и вне объема пластины (см. рис. 9.2). Внутри выделенного цилиндра находится заряд $\Delta q = \sigma \Delta S$, а равный ему [согласно (9.4)] поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность будет складываться из трех частей: потоков через основания цилиндра внутри и вне пластины и потока через боковую поверхность цилиндра. Если устремить высоту цилиндра к нулю, то поток через боковую поверхность тоже обратится в нуль. В результате получим (при $x = 0$):

$$\oint_s (\boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s}) = D_2 \Delta S - D_1 \Delta S = \sigma \Delta S$$

или, после очевидного сокращения, приходим к соотношению:

$$D_2 - D_1 = \sigma. \qquad (1)$$

Направление нормали в наших рассуждениях выбиралось по указанному на рис. 9.2.
Здесь D_1 – индукция внутри пластины, а D_2 – внутри конденсатора вблизи границы раздела сред.
Поскольку напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю, из (9.5) следует, что $D_1 = 0$. В таком случае согласно (1) приходим к выводу, что

$$D_2 = \sigma. \tag{1а}$$

Из соотношений (9.3), (9.5) и (1а) с учетом того, что потенциал и напряженность зависят только от переменной x, получим граничное условие на левой границе ($x = 0$):

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{2а}$$

Рассуждая аналогично, получим условие на правой границе ($x = l$):

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=l} = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{2б}$$

Далее остается найти решение уравнения Лапласа:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющее граничным условиям (2а) и (2б).
Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 x. \tag{4}$$

Граничные условия (2а), (2б) выполняются, если положить

$$C_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{5}$$

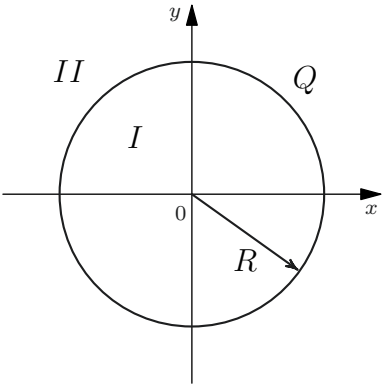
Подставив полученное значение C_2 в выражение (4), найдем зависимость электрического потенциала от координаты:

$$\varphi(x) = C_1 - \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} x. \tag{6}$$

Постоянная интегрирования C_1 однозначно в такой постановке задачи не определяется. Следовательно, потенциал одной из пластин можно выбрать произвольно.

Задача 9.3. Найти потенциал, создаваемый зарядом Q, который равномерно распределен по сфере радиуса R (рис. 9.3).

Рис. 9.3



Решение. В силу сферически симметричного распределения потенциала в пространстве решение является функцией только расстояния r от центра сферы до точки, в которой определяется потенциал. Поскольку в I и II областях $\rho = 0$ (см. рис. 9.3), потенциал следует искать как решение уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1}$$

Запишем оператор Лапласа уравнения (1) в сферической системе координат:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{2}$$

Нас интересует сферически симметричное решение:

$$\varphi = \varphi(r). \tag{3}$$

В этом случае уравнение (2) примет вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0, \tag{4}$$

которое легко интегрируется:

$$\begin{aligned} r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} &= C_1, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial r} &= \frac{C_1}{r^2}, \\ \varphi(r) &= -\frac{C_1}{r} + C_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, получено общее решение, справедливое в каждой из областей ($r < R$) и ($r > R$), но имеющее в них различный набор постоянных интегрирования. Для определения последних используют граничные условия. Примем, что потенциал при $r \to \infty$ равен нулю. Тогда во второй области постоянная C_2 должна быть тоже равна нулю. Следовательно:

$$\varphi(r) = \varphi_{II}(r) = -\frac{C_1}{r}, (r > R). \tag{6}$$

Постоянные интегрирования в выражении для потенциала, относящегося к первой области ($r < R$), обозначим через B_1 и B_2. Тогда выражение (5) для указанного потенциала будет иметь вид:

$$\varphi(r) = \varphi_I(r) = -\frac{B_1}{r} + B_2, (r < R). \tag{7}$$

Из условия ограниченности потенциала внутри сферы следует необходимость равенства нулю константы B_1. Следовательно:

$$\varphi(r) = \varphi_I(r) = B_2 = const, (r < R). \tag{8}$$

Потенциал непрерывен на границе раздела ($r = R$) областей I и II, что приводит к связи постоянных C_1 и B_2:

$$\varphi_I(R) = B_2 = \varphi_{II}(R) = -\frac{C_1}{R}. \tag{9}$$

Для окончательного определения констант требуется еще одно уравнение. Оно может быть получено (как это было сделано в **задаче 9.2**) на основании теоремы Гаусса (9.4) и имеет следующий вид:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma,$$

или, принимая во внимание (9.5):

$$\varepsilon\varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \sigma. \tag{10}$$

Здесь D_{1n}, D_{2n} – проекции (на внешнюю нормаль $\boldsymbol{n}$ к сфере) электрической индукции; E_{1n}, E_{2n} – проекции напряженности электрического поля в областях I и II вблизи поверхности сферы ($r = R$), σ – поверхностная плотность электрического заряда:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}. \tag{11}$$

Затем, воспользовавшись выражением для градиента в сферической системе координат, найдем напряженность электрического поля по формуле (9.3):

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r \quad \left(\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{12}$$

Поскольку орт внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к сфере равен вектору $\boldsymbol{e}_r$, для проекции вектора $\boldsymbol{E}$ получаем:

$$E_n = -\frac{d\varphi}{dr}. \tag{12a}$$

Обращаясь к выражениям (6) и (8) и применяя к ним дважды формулу (12а) при $r = R$, найдем:

$$\begin{aligned} E_{2n} &= -\frac{C_1}{R^2}, \\ E_{1n} &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Из (10), (11) и (13) имеем:

$$E_{2n} = -\frac{C_1}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}.$$

Отсюда:

$$C_1 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Далее из (14) и (9) находим постоянную B_1:

$$B_1 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

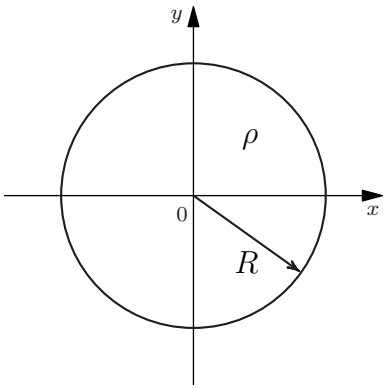
Из (8), (9), подставляя найденные значения B_1, C_1, представим окончательный результат для распределения электрического потенциала в форме:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} & (r \le R), \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} & (r \ge R). \end{cases}$$

Задача 9.4. Определить потенциал, создаваемый зарядом, который равномерно (с плотностью ρ) распределен по объему шара радиуса R (рис. 9.4).

Очевидно, что решение задачи обладает сферической симметрией. По этой причине решение будем искать в виде функции, зависящей от одной переменной r сферической системы координат, т.е. в виде $\varphi = \varphi(r)$.

Рис. 9.4



Решение. Рассмотрим область вне шара ($r > R$), где, по условию задачи, $\rho = 0$. В этой области потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, которое запишем в переменных сферической системы координат:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0. \tag{1}$$

Находим общее решение этого уравнения:

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r} + C_2. \tag{2}$$

Рассуждая, как и в предыдущей задаче, т.е. принимая $\varphi(\infty) = 0$, получаем $C_2 = 0$. Поэтому при $r > R$ имеем:

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь область внутри шара ($r < R$), где $\rho \neq 0$. Здесь потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{4}$$

Общее решение (4) нетрудно получить:

$$\varphi(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{B_1}{r} + B_2. \tag{5}$$

Так как решение должно быть ограниченным при всех $r < R$, то из (5) следует, что $B_1 = 0$ и

$$\varphi(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} + B_2. \tag{6}$$

Для отыскания постоянных C_1, B_2 используем, как и ранее, теорему Гаусса, связи (9.3), (9.5) и непрерывность потенциала на поверхности заряженного шара. Если взять произвольную сферу с центром в начале координат и радиусом, большим R, то согласно (9.4) поток индукции через указанную поверхность будет равен заряду, сосредоточенному внутри шара. В силу сферической симметрии задачи индукция и напряженность электрического поля являются функциями только расстояния от начала координат. Формально это следует из выражения для градиента в сферической системе координат:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r. \tag{7}$$

и соотношений (9.3) и (9.5); $\boldsymbol{e}_r$ – орт сферической системы координат, направленный вдоль радиус вектора $\boldsymbol{r}$. Эти соображения позволяют для указанной поверхности записать теорему Гаусса в виде (учтем, что $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_r$):

$$(De_r)\,4\pi r^2 = \frac{4\pi R^3}{3}\rho. \tag{8}$$

Или:

$$(Ee_r)\,\varepsilon\varepsilon_0\,4\pi r^2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\varepsilon\varepsilon_0\,4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3\rho. \tag{9}$$

Поскольку для потенциала справедливо соотношение (3), то после подстановки последнего в (9) получим:

$$C_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{10}$$

В силу непрерывности потенциала при $r = R$ из (3) и (5) следует, что:

$$\frac{C_1}{R} = -\frac{\rho}{6\varepsilon\varepsilon_0}R^2 + B_2. \tag{11}$$

Отсюда находим:

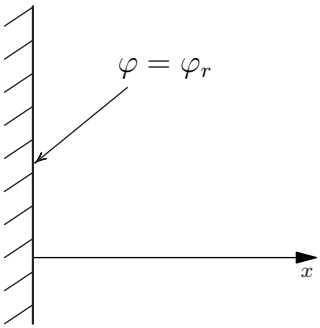
$$B_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Подстановка найденных значений постоянных (10), (11) соответственно в (3) и (6) приведет к окончательному результату следующего вида:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r}, & r \geq R, \\ \dfrac{\rho}{6\varepsilon\varepsilon_0}(3R^2 - r^2), & r < R. \end{cases}$$

Задача 9.5. Анализ двойного слоя. Пусть имеется бинарный электролит одновалентных ионов. Электролит с одной стороны ограничен проводящей плоскостью, потенциал которой равен φ_r (рис. 9.5).

Рис. 9.5



Требуется определить распределение концентраций и потенциала электрического поля в электролите в зависимости от координаты, если концентрация ионов вдали от поверхности равна C_0 (при $x \to \infty$).

Решение. Обратимся к уравнению Пуассона для одномерного случая:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{1}$$

Примем во внимание, что плотность частиц в точке с координатой x в силовом поле определяется формулой (*распределение Больцмана*):

$$C(x) = C_0 e^{-\frac{U(x)}{kT}}, \tag{2}$$

где C_0 – концентрация каждого из сортов ионов вдали от проводящей плоскости ($x \to \infty$); $U(x)$ – потенциальная энергия частицы; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура.
На расстоянии x от проводящей пластины положительный ион (с зарядом q_e) будет обладать потенциальной энергией:

$$U(x) = q_e \varphi(x). \tag{3}$$

Концентрация положительных ионов согласно (2) и (3) определяется равенством:

$$C^+(x) = C_0 e^{-\frac{q_e \varphi(x)}{kT}}, \tag{4а}$$

концентрация отрицательных ионов выражением:

$$C^-(x) = C_0 e^{\frac{q_e \varphi(x)}{kT}}. \tag{4б}$$

Суммарная плотность зарядов равна:

$$\rho(x) = q_e C^+(x) - q_e C^-(x) \tag{5}$$

или на основании (4а) и (4б):

$$\rho(x) = q_e C_0 \left(e^{-\frac{q_e \varphi(x)}{kT}} - e^{\frac{q_e \varphi(x)}{kT}} \right). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (1), приходим к нелинейному уравнению для потенциала $\varphi(x)$:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{q_e C_0}{\varepsilon\varepsilon_0} \left(e^{\frac{q_e \varphi(x)}{kT}} - e^{-\frac{q_e \varphi(x)}{kT}} \right). \tag{7}$$

Рассмотрим приближенный способ решения этого уравнения. С этой целью ограничимся малыми значениями потенциалов или высокими температурами, для которых выполняется неравенство:

$$\left(\frac{q_e \varphi(x)}{kT} \right) \ll 1.$$

В таком случае воспользуемся разложением экспоненты:

$$e^{\pm \frac{q_e \varphi(x)}{kT}} \approx 1 \pm \frac{q_e \varphi(x)}{kT}. \tag{8}$$

В результате уравнение (7) примет вид линейного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{2q_e^2 C_0}{\varepsilon\varepsilon_0 kT} \varphi. \tag{9}$$

Введем обозначение:

$$\xi^2 = \frac{2q_e^2 C_0}{\varepsilon\varepsilon_0 kT}. \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) примет вид:

$$\varphi^{(II)} - \xi^2\varphi = 0. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (11) находим стандартным методом:

$$\varphi(x) = \alpha\, e^{-\xi x} + \beta\, e^{\xi x}. \tag{12}$$

Требуя ограниченности потенциала при $x \to \infty$, получаем, что $\beta = 0$. При $x = 0$, т.е. на поверхности заряженной пластины, потенциал равен φ_r. Из этого условия вычисляем:

$$\alpha = \varphi_r.$$

Итак, зависимость потенциала от координаты определится выражением:

$$\varphi(x) = \varphi_r e^{-\xi x}, \tag{13}$$

где:

$$\xi = \sqrt{\frac{2q_e^2 C_0}{\varepsilon\varepsilon_0 kT}}. \tag{14}$$

Введем обозначение:

$$L_D = \frac{1}{\xi} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 kT}{2q_e^2 C_0}}. \tag{15}$$

Величина L_D называется **дебаевской длиной экранирования** (потенциал убывает в e раз при удалении от поверхности проводника на расстояние L_D в сравнении с кулоновским потенциалом). Из выражения (15) видно, что дебаевская длина уменьшается по мере увеличения концентрации ионов (C_0) или снижения температуры. Величина длины Дебая для концентрации $C_0 = 1\frac{\text{Моль}}{\text{л}} = 10^3\frac{\text{Моль}}{\text{м}^3}$ оказывается равной:

$$L_D = \frac{1}{1,6\times 10^{-19}}\sqrt{\frac{80\times 8,8\times 10^{-1}\times 4,2\times 10^{-21}}{2\times 6\times 10^{23}\times 10^3}} \simeq 3,1\dot{A}.$$

При указанной (весьма высокой) концентрации поле значительно ослабляется уже на расстояниях в несколько ангстрем от заряженной плоскости.

Учебное издание

Акимов Владимир Николаевич

Дифференциальные уравнения (алгоритмы решений и их приложения)

учебное пособие

Подписано в печать 28.02.2025 г.
Формат 60x90/16. Усл. печ. л. 5,75 л. Тираж 200 экз. Заказ № 06-22.

ФГАОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова Минздрава России
(Пироговский Университет),
117513, Москва, ул. Островитянова, 1.
rsmu.ru

ISBN 978-5-88458-730-4

