МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "РОССИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.И. ПИРОГОВА"
(ПИРОГОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ИНСТИТУТ БИОМЕДИЦИНЫ (МБФ)

ТЕОРИЯ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МОСКВА 2025

Министерство здравоохранения Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Российский национальный исследовательский
медицинский университет имени Н.И. Пирогова"
(ФГАОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова Минздрава России
(Пироговский Университет))

Кафедра высшей математики
Институт биомедицины (МБФ)

В.Н. Акимов

ТЕОРИЯ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Учебное пособие

Рекомендовано Координационным советом
по образовательной политике ФГАОУ ВО РНИМУ
им. Н.И. Пирогова Минздрава России
(Пироговский Университет)

Москва
2025

УДК 514.742.4(075.8)
ББК 22.151.5я73
А39

Автор:

В.Н. Акимов — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики медико-биологического факультета ФГАОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова Минздрава России (Пироговский Университет)

Рецензенты:

О.Е. Вайс — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ФГУП ВНИИА им. Н.Л. Духова

А.Н. Осипов — доктор биологических наук, профессор, член-корр. РАН, заведующий кафедрой общей и медицинской биофизики ФГАОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова Минздрава России (Пироговский Университет)

Акимов, В.Н.

А39 **Теория скалярных и векторных полей :** учебное пособие / В.Н. Акимов. — Москва : РНИМУ им. Н.И. Пирогова (Пироговский Университет), 2025. — 204 с.

ISBN 978-5-88458-735-9

В учебном пособии представлен теоретический материал об аппарате теории скалярных и векторных полей для изучения и понимания таких областей знаний, как теоретическая и аналитическая механика, гидро- и газодинамика, механика сплошных сред, теория поля, электродинамика, квантовая механика.

Пособие предназначено для студентов медицинских вузов, обучающихся по специальностям 30.05.01 «Медицинская биохимия», 30.05.02 «Медицинская биофизика», 30.05.03 «Медицинская кибернетика», 06.03.01 «Биология», 31.05.01 «Лечебное дело». Материал будет полезен студентам, аспирантам и преподавателям в рамках таких дисциплин, как «Высшая математика», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Механика, электричество», «Оптика, атомная физика», «Физическая химия».

ISBN 978-5-88458-735-9

УДК 514.742.4(075.8)
ББК 22.151.5я73

© Акимов В.Н., 2025
© ФГАОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова
(Пироговский Университет), 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 6

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ 7
1.1. Криволинейные координаты 7
1.2. Координатные линии и единичные базисные векторы (1-й способ построения) 8
1.3. Координатные поверхности и единичные базисные векторы (2-й способ построения) 12
1.4. Криволинейные ортогональные координаты. Физические, контравариантные и ковариантные составляющие вектора. 17
1.5. Законы преобразований контравариантных и ковариантных составляющих вектора. Взаимосвязь контравариантных и ковариантных компонент вектора 26
1.6. Общее определение вектора и тензора 37

§ 2. ЧАСТНЫЕ СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ 55
2.1. Цилиндрические координаты. 55
2.2. Сферические координаты 59
2.3. Выражение для градиента в цилиндрических и сферических координатах 62
2.4. Пример: вычисление напряжённости поля, создаваемого электрическим диполем 64

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ К МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦ 67
3.1. Кинематика: вектор скорости и его составляющие в ортогональной криволинейной системе координат. 67
3.2. Динамика: уравнения движения частицы в ортогональной криволинейной системе координат (второй закон Ньютона) 74

3.3. Уравнения движения в цилиндрической системе координат. 76
3.4. Примеры задач в цилиндрической системе координат. 79
3.5. Уравнения движения частицы в сферической системе координат. 97
3.6. Динамика: уравнения Лагранжа в обобщённых координатах 101

§ 4. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ И КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛЫ 118
4.1. Определённый интеграл. Свойства. Метод вычисления 118
4.2. Криволинейный интеграл второго типа (рода). Свойства. Метод вычисления. 119
4.3. Пример вычисления криволинейного интеграла второго рода. 124

§ 5. ДВОЙНОЙ И ТРОЙНОЙ (ОБЪЁМНЫЙ) ИНТЕГРАЛЫ 127
5.1. Двойной интеграл 127
5.2. Тройной (объёмный) интеграл. 128
5.3. Примеры на построение интегралов 130
5.4 Свойства двойных и тройных интегралов. 135
5.5. Сведение двойных и тройных интегралов к повторным 137
5.6. Замена переменных в двойных и тройных интегралах 141

§ 6. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ (ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА). ПРИМЕРЫ 149
6.1. Площадь элемента поверхности 151
6.2. Площадь элемента на поверхности уровня криволинейной ортогональной системы координат. 154
6.3. Примеры вычисления векторного элемента поверхности и площади элемента поверхности 156
6.4. Примеры вычисления потока векторного поля 160

§ 7. ИНВАРИАНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО—ГАУССА 164
7.1. Дифференциальное выражение дивергенции векторного поля 166
7.2. Примеры вычисления дивергенции (в криволинейных координатах) 172
7.3. Интегральная теорема (формула) Остроградского—Гаусса 177

§ 8. ИНВАРИАНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РОТОРА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА (ФОРМУЛА) СТОКСА 181
8.1. Дифференциальное выражение ротора векторного поля 184
8.2. Интегральная теорема (формула) Стокса 187
8.3. Примеры с использованием дифференциальных операторов 190

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 199

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА 201

ВВЕДЕНИЕ

Материал пособия выходит за рамки учебной программы, обеспечивая желающих возможностью более глубокого и детального изучения теории скалярных и векторных полей.

Изложение элементов теории скалярного и векторного полей начинается с введения криволинейных координат и построения в них двух типов базисных векторов. Использование двух типов базисных векторов приводит к двум способам определения компонент векторов. Законы преобразования указанных компонент при переходе от одной криволинейной системы координат к другой различаются, что в свою очередь служит основанием для введения ковариантных и контравариантных компонент векторного поля. Положив в основу определения вектора закон преобразования его компонент, что сохраняет эквивалентность такого определения исходному геометрическому определению вектора, осуществляется построение более сложного математического объекта — так называемого тензора.

Дифференциальные операторы, действующие на скалярные и векторные поля, такие как градиент, дивергенция, ротор, определяются инвариантным образом, т. е. независящим от системы координат. Далее, как следствие инвариантных определений, находятся дифференциальные выражения для операторов градиента, дивергенции, ротора, лапласиана в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. Эта схема введения операторов нам кажется более естественной, т. к. инвариантным определениям обсуждаемых операторов можно придать физический смысл, что важно для изучающих прикладные дисциплины. К тому же интегральные теоремы, такие как Остроградского—Гаусса и Стокса, в принятой схеме изложения допускают более простое в техническом отношении доказательство.

Благодарности

Автор признателен Акимову В.Н. (младшему) за помощь в подготовке рисунков для пособия.

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

1.1. Криволинейные координаты

В прямоугольных декартовых координатах $\{x, y, z\}$ положение точки P в пространстве определяется радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, проведённым из начала координат в эту точку:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (1.1)$$

Однако положение точки в пространстве, а следовательно, и радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ можно определить тремя другими числами (координатами) $\{q^1, q^2, q^3\}$, более соответствующими частной задаче и имеющими, в некоторых случаях, определённый геометрический смысл. «Более соответствующие» означает, что как математические выражения, так и техника решения задачи при удачном выборе тройки чисел $\{q^1, q^2, q^3\}$ в ряде случаев значительно упрощаются. При выборе более удобных координат руководствуются наличием симметрии и особенностями в постановке рассматриваемой частной задачи. Набор величин $\{q^1, q^2, q^3\}$, определяющих положение точки P в пространстве, называют **криволинейными координатами**. Примеры криволинейных координат рассматриваются в § 2, и рекомендуется обратится к нему после знакомства с содержанием настоящего 1.1 и следующего 1.2 пунктов.

Так как любой точке P, с одной стороны, ставится в соответствие три координаты $\{q^1, q^2, q^3\}$, а с другой — эта же точка определяется заданием прямоугольных декартовых координат $\{x, y, z\}$, то между ними можно установить функциональные связи. Рассматривая каждую из координат q^i ($i = 1, 2, 3$) как функцию $\{x, y, z\}$ запишем:

$$q^1 = q^1(x, y, z), \quad q^2 = q^2(x, y, z), \quad q^3 = q^3(x, y, z) \qquad (1.2)$$

и, обратно, полагая $\{x, y, z\}$ функциями криволинейных координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, получим:

$$x = x(q^1, q^2, q^3), \quad y = y(q^1, q^2, q^3),$$
$$z = z(q^1, q^2, q^3). \tag{1.3}$$

Подставим соотношения (1.3) для $\{x, y, z\}$ в (1.1), тем самым установим зависимость радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ от координат $\{q^1, q^2, q^3\}$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^1, q^2, q^3) = x(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{i} + y(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{j} + \\ + z(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{k}. \tag{1.4}$$

Это представление для радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ будет ниже неоднократно использоваться.

1.2. Координатные линии и единичные базисные векторы (1-й способ построения)

Пусть заданы три функции одного параметра t на отрезке $t_1 \leqslant \leqslant t \leqslant t_2$:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.5}$$

Полагая, что $\{x, y, z\}$ рассматриваются как координаты точки в декартовом пространстве, будем говорить, что выражения (1.5) являются уравнениями кривой линии в параметрическом виде.

Подставим значения координат точки из (1.5) в выражение для радиус-вектора (1.1). В таком случае получим ещё одну форму задания кривой:

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \tag{1.6}$$

называемую векторной формой записи кривой линии в параметрическом виде.

Перейдём теперь к построению координатных линий, проходящих через произвольную точку P с координатами $\{\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\}$. Если в соотношениях (1.3) зафиксировать любую пару аргументов, а оставшийся считать переменным параметром, играющим ту же роль, что и параметр t в уравнениях (1.5), то получим однопараметрическое задание кривой. Проделав эту процедуру с выражением (1.4), приходим к выводу, что конец радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ опишет именно эту кривую.

Для начала будем считать переменным параметром криволинейную координату q^1, а координаты q^2, q^3 зафиксируем равным $\bar{q}^2$, $\bar{q}^3$ соответственно. Кривую, получающуюся при изменении координаты q^1, будем называть q^1 — **координатной линией**, проходящей через точку P с координатами $\{\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\}$. То, что координатная линия q^1 проходит через точку P, следует из самого построения рассматриваемой кривой. Что касается векторной формы записи q^1 координатной линии, то она получается из выражения (1.4), в котором следует положить $q^2 = \bar{q}^2$ и $q^3 = \bar{q}^3$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3) = x(q^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3)\boldsymbol{i} + y(q^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3)\boldsymbol{j} + \\ + z(q^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3)\boldsymbol{k}. \qquad (1.7)$$

Далее выберем поочерёдно в качестве переменных параметров криволинейные координаты q^2 и q^3. В результате аналогичных рассуждений получим две дополнительные координатные линии q^2 и q^3, которые также проходят через точку P. Тем самым приходим к выводу, что через любую точку можно провести три координатные линии (рис. 1), вдоль каждой из которых изменяется лишь одна криволинейная координата, чем, собственно, эти линии и интересны в сравнении с любой другой тройкой линий, проходящей через ту же точку.

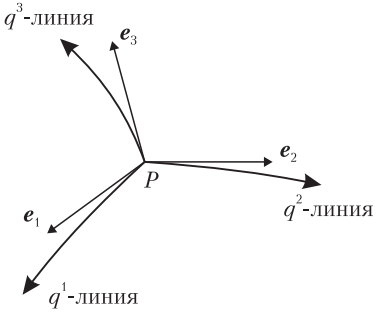

Рис. 1. Координатные линии, проходящие через точку P. Здесь же указаны базисные векторы $\boldsymbol{e}_i$ при $i = 1, 2, 3$, касательные к координатным линиям в точке P

Понятие координатных линий является важным ещё в одном отношении. Решение задач, связанных с такими объектами исследования как векторы и векторные поля, требует введения единичных базисных векторов в криволинейных координатах, имеющих такое же значение, как и базисные векторы в декартовой системе координат. При этом хотелось бы построить базисные векторы наиболее естественным способом, а потому идея выбрать в качестве базисных векторов в любой точке P векторы, касательные к координатным линиям, проходящим через указанную точку, вполне оправдана (такой метод введения базиса назовём **первым способом** построения базисных векторов). Именно так и поступают в теории криволинейных координат, тем более что математическое выражение для вектора, касательного к кривой в данной точке, имеет простой вид. Напомним известное из математического анализа утверждение: если кривая задана в виде векторной функции $\boldsymbol{r}(t)$ параметра t, то вектор:

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \tag{1.8}$$

касателен к кривой в соответствующей точке.

Обратимся к векторному уравнению (1.7) координатной линии q^1. Переменная q^1 имеет в нём тот же смысл, что и параметр t в выражении (1.6). Согласно (1.8), для построения касательной необходимо продифференцировать выражение (1.7) по q^1, а поскольку значения q^2 и q^3 фиксированы, то касательным вектором следует считать частную производную:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}. \tag{1.9}$$

Этот вектор не единичный. Введём единичный вектор $\boldsymbol{e}_1$, определив его равенством:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}, \tag{1.10}$$

где H_1 — длина вектора $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}$.:

$$H_1 = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1} \right|. \tag{1.11}$$

Повторяя эти рассуждения по отношению к переменным q^2 и q^3 и вышеполученным выражениям для $\boldsymbol{e}_1$, придём к трём формулам:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3} \tag{1.12}$$

или:

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.13}$$

на основе которых вычисляются единичные базисные векторы в конкретных криволинейных координатах.

Базисные векторы представлены на рисунке 1. Присутствующие в (1.10) величины H_i, имеющие смысл длин базисных векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$, называются коэффициентами Ламе:

$$H_i = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \right| \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.14}$$

Из представления (1.4) для $\boldsymbol{r}$ следует, что:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial x}{\partial q^i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial q^i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial q^i}\boldsymbol{k} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.15}$$

и, в соответствии с определением (1.14), учитывая (1.15), для коэффициентов Ламе имеем:

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^i} \right)^2 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.16}$$

Ниже, на примерах конкретных криволинейных координат, проиллюстрируем применение формул (1.15) и (1.16) для вычисления коэффициентов Ламе и нахождения единичных базисных векторов. Значение коэффициентов Ламе не исчерпывается тем, что они входят в выражения (1.13). Оказывается, что они присутствуют во многих формулах векторного анализа, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

1.3. Координатные поверхности и единичные базисные векторы (2-й способ построения)

До сих пор при рассуждениях с использованием выражений (1.3) и (1.4) соотношения связей (1.2) оставались в стороне. Обратимся теперь к ним и рассмотрим **поверхность уровня функции** $q^1(x, y, z)$, т. е. геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$q^1(x, y, z) = C_1, \tag{1.17}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Каждому значению C_1 соответствует своя поверхность. В совокупности указанные поверхности образуют семейство поверхностей. В нашем распоряжении имеется ещё два семейства поверхностей:

$$q^2(x, y, z) = C_2, \quad q^3(x, y, z) = C_3, \tag{1.18}$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Через каждую точку пространства проходит по одной поверхности каждого семейства (рис. 2). Назовём эти поверхности координатными поверхностями $q^i = \text{Const.}$ ($i = 1, 2, 3$). В своём пересечении каждая пара координатных поверхностей даст по одной линии пересечения. Вдоль линии пересечения координатных поверхностей $q^2 = \text{Const.}$ и $q^3 = \text{Const.}$ изменяется только координата q^1, т. е. эта линия пересечения является ранее рассмотренной координатной линией q^1. По анало-

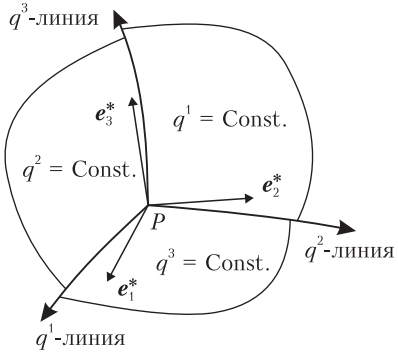

Рис. 2. Координатные поверхности q^i = Const. (i = 1, 2, 3), пересекающиеся в точке P. Векторы $\boldsymbol{e}_i^*$ (i = 1, 2, 3) направлены перпендикулярно координатным поверхностям q^i = = Const.

гии, кривая пересечения пар координатных поверхностей q^1 = Const. и q^3 = Const. есть координатная линия q^2, а кривая пересечения координатных поверхностей q^1 = Const. и q^2 = Const. является координатной линией q^1, что отражено на рисунке 2.

Введение в рассмотрение координатных поверхностей предоставляет ещё один, естественный с геометрической точки зрения, метод построения базисных векторов в любой точке P пространства. Действительно, имея в распоряжении три координатных поверхности, проходящих через точку P, можно, как **2-й способ построения** базисных векторов, выбрать единичные векторы, направленные по нормалям к этим поверхностям в указанной точке. Построение нормали к поверхности:

$$u(x, y, z) = C = \text{Const.}, \tag{1.19}$$

как покажем ниже, легко осуществляется с помощью вектора градиента скалярного поля $u(x, y, z)$, который определяется в прямоугольных декартовых координатах равенством:

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{1.20}$$

Заметим, что для grad u часто используется обозначение ∇u, в котором символ ∇ читается как оператор «набла», действующий на функцию u.

Напомним, что этот вектор обладает двумя важными свойствами (известными из математического анализа): во-первых, градиент, вычисленный в точке P, направлен по нормали

к поверхности уровня $u(x, y, z) = C$, проходящей через эту точку, а во-вторых, указывает направление наибольшего возрастания скалярного поля. Чтобы найти математическую форму записи базисных векторов, рассмотрим три вектора:

$$\operatorname{grad} q^i(x, y, z) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.21}$$

где $q^i(x, y, z)$ определены соотношениями (1.2). Согласно свойству градиента, каждый из векторов (1.21) направлен по нормали к соответствующей поверхности уровня $q^i(x, y, z) =$ $=$ Const. и, следовательно, $\operatorname{grad} q^i$ ($i = 1, 2, 3$) задают направления интересующих нас базисных векторов 2-го способа построения. Эти векторы в общем случае оказываются не единичными. Для построения единичных базисных векторов $\boldsymbol{e}_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) введём обозначения h_i для длин векторов $\operatorname{grad} q^i$:

$$h_i = \left| \operatorname{grad} q^i \right|, \tag{1.22}$$

которые называются дифференциальными параметрами первого порядка.

Итак, в принятых обозначениях тройка единичных базисных векторов, определённых 2-м способом, задаётся выражениями:

$$\boldsymbol{e}_i^* = \frac{1}{h_i} \operatorname{grad} q^i. \tag{1.23}$$

и направлены они в сторону возрастающих значений q^i (градиент указывает направление наибольшего возрастания функции). Базисные векторы в обозначениях $\boldsymbol{e}_i^*$ показаны на рисунке 2.

Параметры h_i, как это следует из (1.22) и определения градиента (1.20), в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\operatorname{grad} q^i = \frac{\partial q^i}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial q^i}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial q^i}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1.24}$$

вычисляются по формулам:

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial q^i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q^i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q^i}{\partial z}\right)^2. \qquad (1.25)$$

Полезно обратить внимание на особенности свойств криволинейных координат.

A. Существенное отличие криволинейных координат от прямоугольных декартовых проявляется в том, что в криволинейных координатах направления единичных базисных векторов, выбранных как 1-м, так и 2-м способами, изменяются при переходе от одной точки к другой, т. е. векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (равно как и $\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$, $\boldsymbol{e}_3^*$) являются функциями координат точки, в которой они построены.

B. Пусть в некоторой точке P задан вектор $\boldsymbol{a}$ (например, скорость, ускорение или вектор напряжённости электрического поля). При решении задач может возникнуть необходимость разложения вектора по трём некомпланарным векторам. Такое разложение можно осуществить как по векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \qquad (1.26)$$

так и по базису $\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$, $\boldsymbol{e}_3^*$:

$$\boldsymbol{a} = a_1^*\boldsymbol{e}_1^* + a_2^*\boldsymbol{e}_2^* + a_3^*\boldsymbol{e}_3^*. \qquad (1.27)$$

Так как базисные векторы 1-го и 2-го способов построения в общем случае не совпадают, то и коэффициенты разложений вектора $\boldsymbol{a}$ в выражениях (1.26) и (1.27) различаются.

C. Имеют место полезные соотношения, связывающие векторы $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$ и grad q^i. Для их вывода рассмотрим выражение для дифференциала $d\boldsymbol{r}$ векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^1, q^2, q^3)$:

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}dq^1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2}dq^2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3}dq^3 \qquad (1.28)$$

и умножим обе части уравнения скалярно на grad q^i. В результате получим:

$$\left(\operatorname{grad} q^i, d\boldsymbol{r}\right) = \left(\operatorname{grad} q^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}\right) dq^1 + \left(\operatorname{grad} q^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2}\right) dq^2 + \\ + \left(\operatorname{grad}\ q^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3}\right) dq^3. \qquad (1.29)$$

Распишем подробно скалярное произведение в левой части этого равенства, используя определение (1.24) для градиента и выражение (1.28) для $d\boldsymbol{r}$:

$$\left(\operatorname{grad} q^i, d\boldsymbol{r}\right) = \frac{\partial q^i}{\partial x} dx + \frac{\partial q^i}{\partial y} dy + \frac{\partial q^i}{\partial z} dz = dq^i. \qquad (1.30)$$

Подставляя (1.30) в левую часть (1.29), равенство приобретает вид:

$$dq^i = \left(\operatorname{grad} q^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}\right) dq^1 + \left(\operatorname{grad} q^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2}\right) dq^2 + \\ + \left(\operatorname{grad}\ q^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3}\right) dq^3. \qquad (1.31)$$

Полагая, что i в этой формуле последовательно равно 1, 2 и 3, в силу произвольности dq^1, dq^2, dq^3 получим искомые соотношения:

$$\left(\operatorname{grad} q^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad (1.32)$$

$$\left(\operatorname{grad} q^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j}\right) = 0 \qquad \left(i \neq j\right). \qquad (1.33)$$

Векторы, обладающие свойствами (1.32) и (1.33), называются **взаимными**. Ниже воспользуемся свойством (1.32) для установления связей между коэффициентами Ламе H_i и дифференциальными параметрами первого порядка h_i.

1.4. Криволинейные ортогональные координаты. Физические, контравариантные и ковариантные составляющие вектора

Начнём с введения понятия криволинейных ортогональных координат. Криволинейные координаты называются **ортогональными**, если координатные линии в каждой точке взаимно перпендикулярны, что одновременно означает ортогональность базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

В приложениях наиболее часто применяют именно **криволинейные ортогональные координаты**. Это обусловлено тем, что для них:

1. Единичные базисные векторы, построенные по 1-му и 2-му способам, совпадают, т. е.:

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i^* \tag{1.34}$$

(*докажите самостоятельно*).

2. Единичные базисные векторы взаимно ортогональны, и потому для скалярных произведений этих векторов справедливо равенство:

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = 0 \quad (i \neq k), \tag{1.35}$$

что весьма удобно при проведении вычислений.

3. Для криволинейных ортогональных координат разложения (1.26) и (1.27) совпадают в силу равенства (1.34):

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3. \tag{1.36}$$

Коэффициенты разложения a_i (i = 1, 2 ,3) в этом выражении называются **физическими составляющими**, либо **криволинейными составляющими** вектора $\boldsymbol{a}$, либо **проекциями** вектора $\boldsymbol{a}$ на оси криволинейных координат. Представление вектора в виде (1.36) далеко не единственное, используемое в приложениях. Ниже, в рамках этого параграфа, остановимся на сделанном утверждении подробнее. Однако в курсах общей

физики, как правило, применяется разложение (1.36) и определённое здесь понятие проекций вектора $\boldsymbol{a}$ на оси криволинейных координат.

4. Между коэффициентами H_i и параметрами h_i существует простая связь:

$$h_i = \frac{1}{H_i}. \tag{1.37}$$

Для доказательства этого равенства обратимся к определению (1.23) базисных векторов $\boldsymbol{e}_i^*$. Так как криволинейные координаты ортогональные, то $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i^*$ и выражению (1.23) можно придать вид:

$$\operatorname{grad} q^i = h_i \boldsymbol{e}_i. \tag{1.38}$$

С другой стороны, как следует из (1.10), для вектора $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$ имеем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} = H_i \boldsymbol{e}_i. \tag{1.39}$$

Воспользуемся теперь свойством взаимных векторов, записанном в форме (1.32), и подставим в неё выражения (1.38) и (1.39). Получим последовательность равенств:

$$\left(\operatorname{grad} q^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \right) = \left(h_i \boldsymbol{e}_i, H_i \boldsymbol{e}_i \right) = h_i H_i \left(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \right) = h_i H_i = 1, \tag{1.40}$$

последнее из которых устанавливает справедливость соотношения (1.37).

До сих пор особое внимание было уделено разложению векторов вида (1.36) по ортонормированному базису. Однако, как показывает теория и практика использования криволинейных координат, в том числе и не ортогональных, существенное значение имеют возможности разложения по тройкам некомпланарных векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$ либо $\operatorname{grad} q^i$ (i = 1, 2, 3).

Используя первую возможность, получим для вектора $\boldsymbol{a}$ представление в виде:

$$\boldsymbol{a} = A^1 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1} + A^2 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2} + A^3 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3}, \qquad (1.41)$$

т. е. разложение по векторам, касательным к соответствующим координатным линиям. Коэффициенты A^1, A^2, A^3 в разложении (1.41) называются **контравариантными составляющими (компонентами)** вектора $\boldsymbol{a}$. Реализация второй возможности позволяет записать, что:

$$\boldsymbol{a} = A_1 \operatorname{grad} q^1 + A_2 \operatorname{grad} q^2 + A_3 \operatorname{grad} q^3, \qquad (1.42)$$

т. е. провести разложение по векторам, перпендикулярным соответствующим координатным поверхностям. Коэффициенты A_1, A_2, A_3 в разложении (1.42) называются **ковариантными составляющими (компонентами)** вектора $\boldsymbol{a}$. Ещё раз отметим, что соотношения (1.41) и (1.42) имеют место для любых криволинейных координат, не обязательно ортогональных.

Далее вновь ограничимся рассмотрением *ортогональных систем координат*. Для того, чтобы подчеркнуть отличие ранее введённых составляющих a_i (i = 1, 2, 3) в разложении (1.36), имеющих простой физический или геометрический смысл, от контравариантных и ковариантных компонент, для a_i, как уже ранее было определено, используется термин **физические составляющие**.

В ортогональных системах координат векторы $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$ и $\operatorname{grad} q^i$ совпадают по направлению, однако длины этих векторов различаются (1.37), поэтому и наборы коэффициентов разложений A^i в (1.41) и A_i в (1.42) не совпадают. Это различие коэффициентов отражается как в расположении индексов — верхних и нижних, так и в названиях коэффициентов разложений.

Наконец, полезно иметь ввиду, что в частном случае прямолинейных прямоугольных координат (декартовы прямоугольные системы координат) возвращаемся к термину «составляющие вектора», так как различие между контравариантными, ковариантными и физическими составляющими исчезает, и следовательно, отпадает необходимость введения этой терминологии.

Докажем это простое утверждение. В рассматриваемом случае *прямолинейных прямоугольных координат* $q^1 = x$, $q^2 = y$, $q^3 = z$. Принимая во внимание выражение (1.1) для $\boldsymbol{r}$, получаем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \boldsymbol{i}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \boldsymbol{j}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k}. \qquad (1.43)$$

Таким образом, базисные векторы, касательные к координатным линиям, совпадают с тройкой базисных векторов в декартовой прямоугольной системе координат, а потому и контравариантные составляющие равны привычным декартовым составляющим вектора. Также просто находим базисные векторы по 2-му способу их определения:

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} q^1 = \operatorname{grad} x = \boldsymbol{i}, \\ &\operatorname{grad} q^2 = \operatorname{grad} y = \boldsymbol{j}, \\ &\operatorname{grad} q^3 = \operatorname{grad} z = \boldsymbol{k}. \end{aligned} \qquad (1.44)$$

Из приведённых равенств следует вывод о совпадении соответствующих базисных векторов и равенстве ковариантных составляющих декартовым составляющим вектора.

Материал, изложенный в данном параграфе, носит в значительной степени формально абстрактный характер, что естественно с позиций математики, являющейся аппаратом применения в самых различных направлениях науки.

Однако для нас не менее важным, а скорее даже главным является понимание прикладной значимости введённых понятий. Содержание последующих параграфов направлено на

приобретение навыков практического применения обсуждаемых понятий. Прежде чем начать осуществление этой задачи, потребуется приложить дополнительно небольшие усилия для получения ответов на вопросы, которые помогут восприятию дальнейшего материала.

Для начала зададимся вопросом: если введены контравариантные, ковариантные и физические составляющие *одного и того же вектора*, то скорее всего между ними имеются функциональные соотношения, которые нужно установить. Знание таких соотношений между различными составляющими позволило бы при решении прикладных задач, если возникает такая необходимость, переходить от одних составляющих к другим. Ответ на поставленный вопрос положительный, в чём легко убедится на основании простых рассуждений. Из выражения (1.10) следует, что частные производные, присутствующие в (1.41), можно представить как:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} = H_i \boldsymbol{e}_i. \tag{1.45}$$

Теперь подставим значения частных производных (1.45) в выражение (1.41), в результате получим:

$$\boldsymbol{a} = A^1 H_1 \boldsymbol{e}_1 + A^2 H_2 \boldsymbol{e}_2 + A^3 H_3 \boldsymbol{e}_3. \tag{1.46}$$

Коэффициенты при базисных векторах в полученном выражении согласно определению (1.36) являются физическими составляющими a_1, a_2, a_3 и, как видно из разложения (1.46), определяются равенствами:

$$a_1 = A^1 H_1, \quad a_2 = A^2 H_2, \quad a_3 = A^3 H_3. \tag{1.47}$$

Равенства (1.47) устанавливают связи между контравариантными и физическими составляющими вектора.

Не составляет труда найти формулы, связывающие ковариантные и физические составляющие. С этой целью заменим входящие в разложение (1.42) градиенты их значениями $\boldsymbol{h}_i \boldsymbol{e}_i$ (i = 1, 2, 3) согласно (1.23). Наконец, воспользовавшись

соотношением (1.37), преобразуем представление вектора (1.42) к виду:

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1} A_1 \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2} A_2 \boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3} A_3 \boldsymbol{e}_3. \qquad (1.48)$$

Из (1.48) видно, что физические составляющие определяются через ковариантные составляющие по формулам:

$$a_1 = \frac{1}{H_1} A_1, \quad a_2 = \frac{1}{H_2} A_2, \quad a_3 = \frac{1}{H_3} A_3. \qquad (1.49)$$

Формулы, связывающие контравариантные и ковариантные составляющие, устанавливаются из сопоставления выражений (1.47) и (1.49) и имеют вид:

$$A^1 H_1 = \frac{1}{H_1} A_1, \quad A^2 H_2 = \frac{1}{H_2} A_2, \quad A^3 H_3 = \frac{1}{H_3} A_3. \qquad (1.50)$$

Полученные равенства справедливы в ортогональных криволинейных координатах, которые, как уже отмечалось, чаще всего используются в приложениях. Тем не менее в пункте 1.5 будут установлены аналоги соотношений (1.50) для общего случая криволинейных координат.

Покажем, что как контравариантные, так и ковариантные составляющие вектора возникают вполне естественным образом. Во многих задачах приходится рассматривать составляющие вектора $d\boldsymbol{r}$, т. е. дифференциала векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^1, q^2, q^3)$, определяемого выражением (1.28), которое для удобства воспроизведём в этом месте:

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3} dq^3. \qquad (1.51)$$

Так, в механике, $d\boldsymbol{r}$ является важнейшей кинематической характеристикой движения (вектором перемещения), через которую определяются такие понятия, как скорость и ускорение материальной точки.

Контравариантные составляющие вектора $d\boldsymbol{r}$ появились автоматически сразу после записи выражения (1.51). Действительно, выражение (1.51) есть ни что иное, как разложение вектора $d\boldsymbol{r}$ по векторам $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$ (i = 1, 2, 3). Сравнение соотношения (1.51) с представлением (1.41), показывает, что набор величин dq^1, dq^2, dq^3 играет роль контравариантных составляющих A^1, A^2, A^3 в (1.41). Следовательно, дифференциалы dq^1, dq^2, dq^3 криволинейных координат являются контравариантными составляющими вектора $d\boldsymbol{r}$. Этот вывод полезно помнить при использовании криволинейных координат в приложениях.

Оставим на время в стороне пример реализации ковариантных составляющих и найдём физические составляющие вектора $d\boldsymbol{r}$. Чтобы выполнить эту задачу, следует представить (1.51) в форме разложения вида (1.36) по единичным базисным векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, что достигается заменой частных производных в (1.51) их значениями (1.45). В результате подстановок получим:

$$d\boldsymbol{r} = H_1 dq^1 \boldsymbol{e}_1 + H_2 dq^2 \boldsymbol{e}_2 + H_3 dq^3 \boldsymbol{e}_3. \qquad (1.52)$$

Сопоставляя это выражение с разложением (1.36), приходим к выводу, что физические составляющие или проекции вектора $d\boldsymbol{r}$ на единичные базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ равны величинам:

$$H_1 dq^1, \quad H_2 dq^2, \quad H_3 dq^3, \qquad (1.53)$$

что, конечно же, согласуется с общими равенствами (1.47).

Перейдём к рассмотрению важного случая появления ковариантных составляющих вектора. В приложениях часто возникает ситуация, в которой некоторая векторная величина $\boldsymbol{a}$ равна градиенту скалярного поля u, заданного в криволинейных координатах:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u. \qquad (1.54)$$

Так, в механике встречаемся с положением, когда вектор силы $\boldsymbol{F}$ определяется через потенциальную энергию П формулой $\boldsymbol{F} = -\text{grad}\,\Pi$, в электростатике напряжённость электрического поля $\boldsymbol{E}$ и электрический потенциал φ связаны формулой $\boldsymbol{F} = -\text{grad}\,\varphi$, плотность диффузионного потока частиц $\boldsymbol{j} = -\text{grad}\,c$, где c — концентрация вещества.

Получим разложение вектора (1.54) по базисным векторам $\text{grad}\,q^i$ ($i = 1, 2, 3$). По условию, скалярная функция u есть функция переменных q^1, q^2, q^3. Обратимся к формулам связи (1.2) и будем рассматривать u как сложную функцию декартовых переменных:

$$u = u(q^1, q^2, q^3) = \\ = u[q^1(x, y, z), q^2(x, y, z), q^3(x, y, z)]. \qquad (1.55)$$

В декартовых координатах выражение для градиента определяется как:

$$\text{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \qquad (1.56)$$

Вычисляя частные производные в этом выражении по правилу вычисления производной сложной функции (1.55), преобразуем (1.56) к виду:

$$\text{grad}\,u = \left(\frac{\partial u}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q^3}\frac{\partial q^3}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial q^3}\frac{\partial q^3}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial q^3}\frac{\partial q^3}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}, \qquad (1.57)$$

и затем к форме:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial q^1}\left(\frac{\partial q^1}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial q^1}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial q^1}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) + \\ + \frac{\partial u}{\partial q^2}\left(\frac{\partial q^2}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial q^2}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial q^2}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) + \\ + \frac{\partial u}{\partial q^3}\left(\frac{\partial q^3}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial q^3}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial q^3}{\partial z}\boldsymbol{k}\right). \qquad (1.58)$$

Выражения в круглых скобках в (1.58), принимая во внимание (1.20), заменяем на $\operatorname{grad} q^i$ (i = 1, 2, 3). В результате приходим к интересующему нас разложению вектора:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial q^1}\operatorname{grad} q^1 + \frac{\partial u}{\partial q^2}\operatorname{grad} q^2 + \frac{\partial u}{\partial q^3}\operatorname{grad} q^3. \qquad (1.59)$$

Установленная формула важна в двух отношениях. Во-первых, сопоставляя выражение (1.59) с разложением (1.42), можно сделать утверждение, что частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial q^1}, \quad \frac{\partial u}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial q^3} \qquad (1.60)$$

являются ковариантными составляющими вектора grad u. Этот вывод не раз пригодится при рассмотрении задач динамики на основе уравнений Лагранжа в пункте 3.6.

Во-вторых, осталось сделать ещё один шаг преобразований для получения выражения для градиента в произвольной ортогональной системе координат в физических составляющих. Действительно, в силу равенств (1.37) и (1.38) для $\operatorname{grad} q^i$ (i = 1, 2, 3) имеют место равенства:

$$\operatorname{grad} q^i = \frac{1}{H_i}\boldsymbol{e}_i, \qquad (1.61)$$

воспользовавшись которыми для преобразования представления (1.59) найдём выражение градиента в произвольной ортогональной криволинейной системе координат:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_3. \qquad (1.62)$$

Этим выражением воспользуемся в § 2 для записи градиента в некоторых частных системах криволинейных координат.

1.5. Законы преобразований контравариантных и ковариантных составляющих вектора. Взаимосвязь контравариантных и ковариантных компонент вектора

Положим, что вместо исходных криволинейных координат q^1, q^2, q^3 введён новый набор криволинейных координат $\tilde{q}^1$, $\tilde{q}^2$, $\tilde{q}^3$, который связан с исходными координатами соотношениями:

$$q^i = q^i(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3) \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (1.63)$$

В таком случае говорят, что формулы (1.63) определяют преобразование координат.

Будем считать, что уравнения (1.63) можно разрешить относительно новых переменных $\tilde{q}^1$, $\tilde{q}^2$, $\tilde{q}^3$:

$$\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^1, q^2, q^3) \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (1.64)$$

Преобразование (1.64) называется обратным по отношению к преобразованию координат (1.63).

Следуя выражению (1.41), запишем соответствующее разложение вектора $\boldsymbol{a}$ в исходной системе координат q^1, q^2, q^3:

$$\boldsymbol{a} = A^1\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1} + A^2\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2} + A^3\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3} = \sum\nolimits_{i=1}^{3} A^i\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \qquad (1.65)$$

и его же представление в новой системе координат $\tilde{q}^1$, $\tilde{q}^2$, $\tilde{q}^3$:

$$\boldsymbol{a} = \tilde{A}^1 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{q}^1} + \tilde{A}^2 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{q}^2} + \tilde{A}^3 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{q}^3} = \sum\nolimits_{i=1}^{3} \tilde{A}^i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{q}^i}. \qquad (1.66)$$

Согласно определению (1.41), наборы величин A^1, A^2, A^3 и $\tilde{A}^1$, $\tilde{A}^2$, $\tilde{A}^3$ являются контравариантными составляющими одного и того же вектора $\boldsymbol{a}$ в исходной и новой системах криволинейных координат. Зададимся вопросом: как выражаются новые компоненты вектора $\boldsymbol{a}$ через исходные?

В целях упрощения записи сумм, подобных тем, что стоят в правых частях равенств (1.65) и (1.66) и встретятся при обсуждении поставленного вопроса, условимся, как это принято в математической литературе, опускать знак суммы, подразумевая суммирование по всем значениям дважды повторяющегося индекса. Таким образом, вместо записи:

$$\boldsymbol{a} = \sum\nolimits_{i=1}^{3} A^i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$$

будем иметь:

$$\boldsymbol{a} = A^i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}, \qquad (1.67)$$

где по повторяющемуся индексу i подразумевается суммирование от 1 до 3. Аналогично, выражение (1.66) запишется как:

$$\boldsymbol{a} = \tilde{A}^i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{q}^i}. \qquad (1.68)$$

Для частных производных $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$ в выражении (1.67), по правилу вычисления производной сложной функции с использованием нашего соглашения о записи сумм, следует, что:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i}. \qquad (1.69)$$

Здесь повторяющийся индекс $j = 1, 2, 3$, и по нему проводится суммирование. Подставив соотношения (1.69) в (1.67),

получим разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по базисным векторам $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{q}^j}$ новой системы координат:

$$\boldsymbol{a} = A^i \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{q}^j}. \tag{1.70}$$

В этом выражении суммирование проводится по двум парам повторяющихся индексов i и j. Сумма не зависит от обозначения индекса суммирования, чем и воспользуемся для дальнейших преобразований. В целях сравнения разложения (1.70) с разложением (1.68), поменяем местами индексы i и j в формуле (1.70). В результате заключаем, что:

$$\boldsymbol{a} = A^j \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{q}^i}. \tag{1.71}$$

Приравнивая коэффициенты при векторах $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{q}^i}$ в разложениях вектора $\boldsymbol{a}$ (1.68) и (1.71), приходим к формулам, устанавливающим связи между контравариантными составляющими вектора при переходе от одной системы криволинейных координат к другой:

$$\tilde{A}^i = A^j \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j}. \tag{1.72}$$

Иными словами, нами установлен закон преобразования контравариантных составляющих вектора при преобразовании криволинейных координат (1.63).

Найдём теперь закон преобразования ковариантных составляющих вектора. Представление вектора $\boldsymbol{a}$ с использованием ковариантных составляющих в системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, согласно определению (1.42), имеет вид:

$$\boldsymbol{a} = A_j \operatorname{grad} q^j. \tag{1.73}$$

Индекс суммирования целенаправленно выбран как j. В новой системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3\}$ для вектора $\boldsymbol{a}$, по аналогии с (1.73), запишем:

$$\boldsymbol{a} = \tilde{A}_j \operatorname{grad} \tilde{q}^j. \tag{1.74}$$

Задача заключается в определении связей между ковариантными составляющими $\tilde{A}_i$ в новой системе криволинейных координат и ковариантными составляющими A_j в исходной системе. Для начала преобразуем присутствующие в выражении (1.73) $\operatorname{grad} q^j$ с помощью формулы (1.59), которую приведём здесь в форме:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial q^i} \operatorname{grad} q^i. \tag{1.75}$$

Далее, в это выражение вместо функции u подставим q^j, а q^i заменим на $\tilde{q}^i$, что позволит выразить $\operatorname{grad} q^j$ через $\operatorname{grad} \tilde{q}^i$:

$$\operatorname{grad} q^j = \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i} \operatorname{grad} \tilde{q}^i. \tag{1.76}$$

Теперь подставим это выражение в разложение (1.73), в результате чего приведём его к виду:

$$\boldsymbol{a} = A_j \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i} \operatorname{grad} \tilde{q}^i. \tag{1.77}$$

Сравнивая представления вектора $\boldsymbol{a}$ в (1.74) и (1.77), заключаем, что между коэффициентами соответствующих разложений имеет место равенство:

$$\tilde{A}_i = A_j \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i}, \tag{1.78}$$

которое и устанавливает закон преобразования ковариантных составляющих при переходе от одной системы координат к другой.

Из сравнения выражений (1.72) и (1.78) делаем заключение, что законы преобразований контравариантных и ковариантных составляющих, вообще говоря, различаются, что и оправдывает введение верхних и нижних индексов в обозначениях, составляющих вектора.

Ранее в пункте 1.4 были установлены простые соотношения между контравариантными и ковариантными составляющими вектора в ортогональных криволинейных системах координат. Установим аналогичные связи для общего случая криволинейных координат. Обратимся к выражениям (1.41) и (1.42), которые определяют разложения вектора $\boldsymbol{a}$ по линейно независимым системам базисных векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$ либо $\operatorname{grad} q^i$ ($i = 1, 2, 3$) соответственно, и перепишем их в компактном виде, воспользовавшись принятым соглашением обозначения сумм:

$$\boldsymbol{a} = A^i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \tag{1.79}$$

и

$$\boldsymbol{a} = A_j \operatorname{grad} q^j. \tag{1.80}$$

Если разложить каждый из векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$ по базисным векторам $\operatorname{grad} q^j$ и ввести обозначения g_{ij} для коэффициентов разложений, то придём к выражению:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} = g_{ij} \operatorname{grad} q^j, \tag{1.81}$$

где, напомним, по повторяющемуся индексу j проводится суммирование. Подставим (1.81) в выражение (1.79) и запишем его в виде:

$$\boldsymbol{a} = g_{ij} A^i \operatorname{grad} q^j. \tag{1.82}$$

Сравнивая выражения (1.80) и (1.82), приходим к выводу, что:

$$A_j = g_{ij} A^i. \tag{1.83}$$

Для окончательного решения вопроса необходимо найти неизвестные коэффициенты g_{ij}, и здесь обнаружится значение ранее установленных соотношений (1.32) и (1.33), которые запишем в виде одной строки:

$$\left(\operatorname{grad} q^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j} \right) = \delta^i_j, \tag{1.84}$$

используя дельта-символ Кронекера, определяемый равенствами:

$$\delta^i_j = 1 \ \text{ при } \ i = j, \qquad \delta^i_j = 0 \ \text{ при } \ i \neq j. \tag{1.85}$$

Умножим обе части выражения (1.81) скалярно на вектор $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^k}$ и осуществим простые преобразования, воспользовавшись свойством (1.84):

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^k} \right) = g_{ij} \left(\operatorname{grad} q^j, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^k} \right) = g_{ij} \delta^j_k = g_{ik} \tag{1.86}$$

или, меняя индекс k на j, перепишем полученное равенство в виде:

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.87}$$

Итак, искомые коэффициенты разложения в выражении (1.81) найдены и определяются равенствами (1.87). Чтобы вычислить их для заданной криволинейной системы координат, следует для $\boldsymbol{r}$ воспользоваться выражениями (1.3) и (1.4), которые в рассматриваемой системе криволинейных координат считаются известными и обретают конкретный вид.

Отметим, что матрица коэффициентов g_{ij} обладает свойством симметрии:

$$g_{ij} = g_{ji}, \tag{1.88}$$

так как согласно (1.87) элементы g_{ij} равны скалярным произведениям векторов, и не изменяется при перестановке сомножителей. Набор функций g_{ij}, определённых равенствами (1.87), называется **ковариантным фундаментальным тензором**. Разъяснение этому названию дадим после того, как введём определение тензора.

Отметим ещё одно важное для приложений свойство этого тензора в ортогональных криволинейных координатах. Напомним, что криволинейные координаты называются **ортогональными**, если координатные линии в каждой точке взаимно перпендикулярны. Но это и означает ортогональность векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$, касательных к координатным линиям. Поэтому скалярные произведения в правых частях равенств (1.87) обращаются в нуль при $i \neq j$, т. е. матрица g_{ij} оказывается диагональной. Выясним теперь значения диагональных элементов. При $i = j$, следуя формуле (1.87) и определению коэффициентов Ламе (1.11), получим, что:

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j} \right) = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \right|^2 = H_i^2. \tag{1.89}$$

Таким образом, в ортогональных криволинейных координатах набор величин g_{ij} представляется матрицей:

$$\begin{pmatrix} H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3^2 \end{pmatrix}, \tag{1.90}$$

в которой диагональные элементы равны квадратам значений коэффициентов Ламе.

На основании отмеченного свойства симметрии (1.88) интересующая нас связь (1.83) между контравариантными и ковариантными составляющими может быть представлена в форме:

$$A_j = g_{ij}A^i = g_{ji}A^i. \tag{1.91}$$

и, наконец, заменой индексов i на j и обратно придадим соотношениям (1.91) вид:

$$A_i = g_{ij}A^j. \tag{1.92}$$

Резонно теперь обратно выразить составляющие вектора A^j через A_i. Переходя к решению этой задачи, обозначим элементы матрицы, обратной матрице с элементами g_{ij}, как g^{ij}. Из определения обратной матрицы следует, что для элементов прямой и обратной матриц имеет место равенство:

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \tag{1.93}$$

которое окажется полезным уже на следующей стадии вычислений. Обратимся к выражению (1.92) и умножим обе его части на g^{ki} (и просуммируем по индексу i):

$$g^{ki}A_i = g^{ki}g_{ij}A^j = \delta^k_j A^j = A^k. \tag{1.94}$$

В этой цепочке преобразований использовались свойства (1.93) и (1.85). Таким образом, имеет место формула:

$$A^i = g^{ij}A_j, \tag{1.95}$$

позволяющая при необходимости найти контравариантные составляющие по значениям ковариантных составляющих вектора. Важно помнить, что, говоря о контравариантных и ковариантных составляющих вектора, имеются ввиду различные составляющие одного и того же вектора. Это следует как из самих определений (1.41) и (1.42) соответствующих составляющих, так и наличия связей (1.92) и (1.95) между ними.

Так как использование контравариантных и ковариантных составляющих как способа задания векторов полезно, то следует развить технику вычисления по *этим составляющим* таких важных понятий векторной алгебры, как квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками пространства, длина вектора, угол между векторами, скалярное и векторное произведение. Ниже рассмотрим некоторые из них и убедимся, что во всех формулах их вычисления фигурирует фундаментальный тензор g_{ij}, так что использование в названии термина «фундаментальный» вполне уместно.

Начнём с вывода формулы для квадрата длины между двумя бесконечно близкими точками или квадрата элемента длины, при этом будем исходить из известной метрики трёхмерного эвклидова пространства. Пусть $d\boldsymbol{r}$ — вектор, соединяющий эти точки. Для вектора $d\boldsymbol{r}$ имеем выражение (1.28), которое приведём здесь в форме:

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} dq^i. \tag{1.96}$$

Напомним, что dq^i в (1.96) являются контравариантными составляющими вектора $d\boldsymbol{r}$. Введём обозначение ds^2 для квадрата длины между двумя бесконечно близкими точками. По определению (в евклидовом пространстве) ds^2 равен квадрату длины вектора $d\boldsymbol{r}$, который в свою очередь равен скалярному произведению $(d\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r})$. Следовательно, ссылаясь на (1.96), можно записать, что:

$$ds^2 = \left|d\boldsymbol{r}\right|^2 = \left(d\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} dq^i, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j} dq^j\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j}\right) dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j. \tag{1.97}$$

В последнем равенстве использовалось выражение (1.87). Итак, квадрат элемента длины определяется контравариантными составляющими dq^i по формуле (1.97) и заранее най-

денному фундаментальному тензору для выбранной системы криволинейных координат.

Перейдём теперь к рассмотрению вопроса о вычислении значения длины какого-либо вектора по его контравариантным или ковариантным составляющим. Будем считать для определённости, что вектор определён контравариантными составляющими A^i. Выберем вектор $d\boldsymbol{r}$, контравариантные составляющие которого равны dq^i, совпадающим по направлению с вектором $\boldsymbol{a}$. Такой выбор означает, что составляющие dq^i пропорциональны составляющим A^i:

$$dq^i = \lambda A^i. \tag{1.98}$$

Величина λ при переходе от одной системы координат к другой остаётся инвариантной (неизменной), так как составляющие в обеих частях равенства (1.98) преобразуются по одному и тому же закону преобразования.

В силу того, что составляющие dq^i в λ раз больше составляющих A^i, следует считать, что квадрат длины вектора $d\boldsymbol{r}$ в λ^2 раз превосходит квадрат длины вектора $\boldsymbol{a}$, т. е.:

$$\left|d\boldsymbol{r}\right|^2 = \lambda^2 \left|\boldsymbol{a}\right|^2. \tag{1.99}$$

Было показано, что квадрат длины вектора $d\boldsymbol{r}$ находится по его составляющим dq^i на основе формулы (1.97). Воспользуемся выражением (1.97) и заменим dq^i их значениями (1.98):

$$\left|d\boldsymbol{r}\right|^2 = g_{ij} dq^i dq^j = \lambda^2 g_{ij} A^i A^j. \tag{1.100}$$

Подставляя выражение (1.100) в левую часть соотношения (1.99) и сокращая на λ^2, получим интересующее нас выражение для квадрата длины вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}^2 = g_{ij} A^i A^j \tag{1.101}$$

и, как следствие, формулу, позволяющую находить длину вектора по заданным контравариантным составляющим:

$$\left|\boldsymbol{a}\right| = \sqrt{g_{ij} A^i A^j}\,. \qquad (1.102)$$

Правую часть (1.102) можно преобразовать, если воспользоваться соотношениями (1.93) и (1.95). В таком случае получим ещё два выражения, по которым рассчитывается длина вектора:

$$\left|\boldsymbol{a}\right| = \sqrt{g^{ij} A_i A_j} = \sqrt{A^i A_i}\,. \qquad (1.103)$$

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении скалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по их контравариантным составляющим A^i и B^i соответственно. Представим каждый вектор в виде (1.67) и составим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right) = \left(A^i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}, B^j \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j} \right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j} \right) A^i B^j = g_{ij} A^i B^j. \qquad (1.104)$$

При переходе к последнему равенству воспользовались выражением (1.87). Таким образом, скалярное произведение двух векторов находится по составляющим векторов согласно следующим выражениям:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = g_{ij} A^i B^j = A^i B_i = A_k B^k = g^{ij} A_i B_j. \qquad (1.105)$$

Такое разнообразие форм записи $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ является следствием соотношений (1.93) и (1.95). Условие ортогональности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, которое эквивалентно равенству нулю скалярного произведения, следует из (1.105) и имеет вид:

$$g_{ij} A^i B^j = A^i B_i = A_k B^k = g^{ij} A_i B_j = 0. \qquad (1.106)$$

Что касается вопроса вычисления угла φ между двумя векторами, то остаётся всего лишь воспользоваться равенствами (1.102) и (1.105) и известной формулой векторной алгебры, согласно которой имеем:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\sqrt{g_{ij}B^iB^j}} =$$

$$= \frac{A^iB_i}{\sqrt{A^iA_i}\sqrt{B^iB_i}} = \frac{g^{ij}A_iB_j}{\sqrt{g^{ij}A_iA_j}\sqrt{g^{ij}B_iB_j}}. \qquad (1.107)$$

1.6. Общее определение вектора и тензора

Преобразования координат, определяемые формулами (1.72) и (1.78), позволят нам иначе ввести определение вектора, и, что принципиально важно, ввести понятие тензора.

Всюду выше, употребляя термин вектор, естественно имелся ввиду объект, определяемый как направленный отрезок, т. е. использовали это понятие в смысле определения векторной алгебры, и, как следствие, получили соотношения (1.72) и (1.78). Важно, что обсуждаемое определение, имеющее простой геометрический смысл, не использует какой-либо системы координат (логика построения теории векторной алгебры и векторного анализа стремится максимально избавиться от координатной системы, обеспечивая тем самым независимость выводов и результатов теории от выбранной системы координат).

В процессе развития целого ряда научных направлений в математике, механике и физике выяснилось, что многие задачи приводят к классу объектов (тензоры) более сложного характера, нежели вектор, и включающего последний как частный случай. Однако дать простое геометрическое представление для этого класса объектов и положить его в основу определения тензора, в отличие от векторов, в общем случае не представляется возможным. Поэтому, как альтернатива, используется аналитический подход к построению определения тензора, который предполагает использование координатных систем. Как первый шаг на этом пути необходимо ввести новое (конечно же эквивалентное вышеприведённому) аналитическое определение вектора, простое

в математическом отношении обобщение которого и приводит к понятию тензора. Пусть в некоторой системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$ контравариантные составляющие некоторого вектора $\boldsymbol{a}$ равны A^i, так что:

$$\boldsymbol{a} = A^i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}. \tag{1.108}$$

В другой системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3\}$ новые контравариантные составляющие $\tilde{A}^i$ того же самого вектора $\boldsymbol{a}$ будут, в соответствии с (1.72), выражаться формулами:

$$\tilde{A}^i = A^j \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j}. \tag{1.109}$$

Если, наоборот, задать один вектор в системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$ составляющими A^i, а другой вектор определить в системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3\}$ контравариантными составляющими $\tilde{A}^i$, связанными с A^i соотношениями (1.109), то эти два вектора будут тождественными. Иными словами, справедливо считать, что составляющие A^i и $\tilde{A}^i$, связанные соотношениями (1.109), **определяют один и тот же вектор**. Это обстоятельство позволяет ввести новое, аналитическое определение вектора, эквивалентное геометрическому определению, при этом дадим обобщение на случай криволинейных систем координат в n-мерном пространстве.

Если для каждой системы координат $\{q^1, q^2, \ldots, q^n\}$ определена совокупность n функций $A^1, A^2, \ldots, A^n$ так, что для системы координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \ldots, \tilde{q}^n\}$ имеется свой набор функций $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \ldots, \tilde{A}^n$, и при преобразовании координат:

$$q^i = q^i(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \ldots, \tilde{q}^n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.110}$$

эти функции преобразуются по закону:

$$\tilde{A}^i = A^j \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.111}$$

то говорят, что совокупность величин A^1, A^2, ..., A^n определяет вектор, а сами величины A^i называют ***контравариантными составляющими*** *или* ***компонентами вектора***.

Итак, в основу определения положен закон преобразования (1.72), расширенный на случай пространства n измерений.

С таким же успехом можно было в рассуждениях, начиная с формулы (1.108), если заменить её на выражение (1.73), а вместо (1.109) использовать закон преобразования (1.78), воспользоваться ковариантными составляющими. В таком случае пришли бы к заключению, что, если задать один вектор в системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$ составляющими A_i, а другой вектор определить в системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3\}$ ковариантными составляющими $\tilde{A}_i$, связанными с A_j соотношениями (1.78), то эти два вектора будут тождественными. Поэтому в равной степени можно определить вектор в следующей редакции:

Если для каждой системы координат $\{q^1, q^2, ..., q^n\}$ определена совокупность n функций A^1, A^2, ..., A^n так, что для системы координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, ..., \tilde{q}^n\}$ имеется свой набор функций $\tilde{A}^1$, $\tilde{A}^2$, ..., $\tilde{A}^n$, и при преобразовании координат:

$$q^i = q^i(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, ..., \tilde{q}^n) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{1.112}$$

эти функции преобразуются по закону:

$$\tilde{A}_i = A_j \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i} \quad (i, j = 1, 2, ..., n), \tag{1.113}$$

то говорят, что совокупность величин A^1, A^2, ..., A^n определяет вектор, а сами величины A_i называют ***ковариантными составляющими*** *или* ***компонентами вектора***.

Прежде чем перейдём к определению тензора, рассмотрим примеры, которые позволят уяснить принципы, положенные в основу определения тензоров. Обратимся к уже

знакомому нам выражению (1.97) для квадрата элемента длины между двумя бесконечно близкими точками. Расстояние между двумя точками не зависит от системы координат, в которой проводятся вычисления. В силу этого имеет место равенство:

$$\tilde{g}_{kl}\, d\tilde{q}^k d\tilde{q}^l = g_{ij}\, dq^i dq^j, \tag{1.114}$$

левая часть которого есть квадрат элемента длины, рассчитанный в системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \ldots, \tilde{q}^n\}$, а правая часть — та же величина, записанная в системе координат $\{q^1, q^2, \ldots, q^n\}$. Установим соотношения между элементами g_{ij} при переходе от одной системы координат к другой. Используя контравариантный характер преобразований дифференциалов dq^i, находим, что:

$$dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^k} d\tilde{q}^k, \qquad dq^j = \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l} d\tilde{q}^l. \tag{1.115}$$

После подстановки (1.115) в правую часть (1.114) получаем:

$$\tilde{g}_{kl} d\tilde{q}^k d\tilde{q}^l = g_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l} d\tilde{q}^k d\tilde{q}^l. \tag{1.116}$$

В силу произвольности значений $d\tilde{q}^i$ делаем заключение о равенстве коэффициентов при произведениях соответствующих дифференциалов $d\tilde{q}^k d\tilde{q}^l$ в (1.116). В результате найдём интересующий нас закон преобразования элементов g_{ij} при преобразованиях координат:

$$\tilde{g}_{kl} = g_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l}. \tag{1.117}$$

Заметим, что в этот закон преобразования входят в определённых комбинациях те же частные производные, что и в формуле преобразования ковариантных составляющих вектора (1.115). С другой стороны, имеем некий новый объект, задаваемый в каждой системе координат своей совокупно-

стью величин g_{ij}, преобразующихся при замене системы координат по более сложным формулам (1.117) в сравнении с (1.115). В формуле (1.117) присутствуют произведения частных производных одного и того же вида: производные по новым координатам от старых координат. Именно такой вид производных входит в определение ковариантных составляющих вектора (1.113); по этой причине оба индекса k и l в выражении (1.117) расположены снизу. Уже этот пример наводит на мысль о возможности введения классификации совокупности величин по законам их преобразования. Однако этим множество законов преобразования далеко не исчерпывается, в чём убедимся на следующих примерах физического содержания.

В изотропной проводящей среде закон Ома, записанный в дифференциальной форме, определяет связь между вектором плотности электрического тока $\boldsymbol{j}$ и вектором напряжённости электрического поля $\boldsymbol{E}$ в данной точке среды и формулируется в виде уравнения:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}. \tag{1.118}$$

Коэффициент пропорциональности σ в этом уравнении называется электрической проводимостью среды и, в случае изотропной в электрическом отношении среды, является скалярной величиной. В таком случае векторы $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$, как это следует из уравнения (1.118), параллельны, т. е. каждая составляющая плотности тока j^k пропорциональна той же составляющей вектора напряжённости электрического поля E^k с одним и тем же коэффициентом пропорциональности σ:

$$j^k = \sigma E^k. \tag{1.119}$$

Как видно из обозначений, соотношения (1.119) приведены в форме, использующей контравариантные составляющие векторов $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$. В равной степени можно было бы использовать ковариантные составляющие, и выбор контравариантных составляющих сделан лишь для целей конкретизации

дальнейших выкладок. В анизотропной среде вектор плотности тока в общем случае не параллелен вектору напряжённости электрического поля; каждая составляющая плотности электрического тока, вообще говоря, зависит от всех составляющих вектора напряжённости поля, что может быть выражено следующими линейными зависимостями составляющих плотности тока j^k от составляющих вектора напряжённости E^l:

$$j^k = \sigma_l^k E^l \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1.120}$$

или в развёрнутом виде записи:

$$\begin{aligned} j^1 &= \sigma_1^1 E^1 + \sigma_2^1 E^2 + \sigma_3^1 E^3, \\ j^2 &= \sigma_1^2 E^1 + \sigma_2^2 E^2 + \sigma_3^2 E^3, \\ j^3 &= \sigma_1^3 E^1 + \sigma_2^3 E^2 + \sigma_3^3 E^3. \end{aligned} \tag{1.121}$$

Набор девяти величин σ_l^k представим в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix}, \tag{1.122}$$

в связи с чем соотношение (1.120) можно записать как произведение введённой матрицы на вектор-столбец, составленный из компонент вектора $\boldsymbol{E}$:

$$\begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{pmatrix}. \tag{1.123}$$

В обозначении σ_l^k индекс k расположен вверху из эстетических соображений — в левой части формулы (1.120) этот

индекс находится сверху, однако в дальнейшем выяснится более глубокий смысл такой расстановки индексов в σ_l^k. Выписывая уравнение (1.120), не опирались на какую-либо частную систему координат. Но очевидно, что в каждой конкретной системе координат реализуются свои наборы составляющих векторов плотности тока и напряжённости поля, присутствующие в уравнениях (1.120), а, следовательно, и свои наборы чисел σ_l^k (в данной точке среды). Итак, приходим к выводу, что проводимость с позиции математического описания есть совокупность чисел σ_l^k (в данной точке среды), определённых для каждой системы координат. Коль скоро наборы чисел, о которых идёт речь, определены в каждой системе координат, то естественно поставить вопрос, как по известному набору чисел σ_l^k в одной системе координат найти их значения в любой другой системе координат, иными словами, получить закон преобразования σ_l^k при смене координат. Перейдём к ответу на поставленный вопрос. Будем считать, что соотношения (1.120) относятся к системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, а соотношения:

$$\tilde{j}^s = \tilde{\sigma}_n^s \tilde{E}^n \tag{1.124}$$

к системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3\}$.

Согласно закону преобразования контравариантных составляющих (1.111), можно записать, что:

$$\tilde{j}^k = j^m \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^m}, \quad \tilde{E}^l = E^n \frac{\partial \tilde{q}^l}{\partial q^n} \tag{1.125}$$

и обратно:

$$j^k = \tilde{j}^m \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^m}, \quad E^l = \tilde{E}^n \frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n}. \tag{1.126}$$

Подставим выражения (1.126) в левую и правую части закона Ома (1.120). В результате получим:

$$\tilde{j}^m \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^m} = \sigma_l^k \tilde{E}^n \frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n}. \tag{1.127}$$

Далее приведём это соотношение к виду (1.124), что достигается умножением обеих сторон равенства (1.127) на $\dfrac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k}$ и последующим суммированием по индексу k:

$$\tilde{j}^m \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^m}\frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} = \sigma_l^k \tilde{E}^n \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k}\frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n}. \qquad (1.128)$$

Воспользуемся тем, что:

$$\frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^m}\frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} = \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial \tilde{q}^m} = \delta_m^s, \qquad (1.129)$$

и преобразуем уравнение (1.128) к виду:

$$\tilde{j}^s = \sigma_l^k \tilde{E}^n \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k}\frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n}. \qquad (1.130)$$

Из сравнения выражений (1.124) и (1.130) делаем вывод о равенстве правых частей, которое запишем в форме

$$\tilde{\sigma}_n^s \tilde{E}^n = \sigma_l^k \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k}\frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n}\tilde{E}^n. \qquad (1.131)$$

Наконец, в силу произвольности значений контравариантных составляющих вектора напряжённости $\tilde{E}^n$, установим искомое соотношение между элементами $\tilde{\sigma}_n^s$ и σ_l^k:

$$\tilde{\sigma}_n^s = \sigma_l^k \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k}\frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n}. \qquad (1.132)$$

В целях дальнейшего обсуждения полученного результата нам удобнее будет переименовать обозначения индексов в формуле (1.132) и представить её в виде:

$$\tilde{\sigma}_l^k = \sigma_j^i \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i}\frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l}. \qquad (1.133)$$

Теперь сравним полученный закон преобразования набора элементов σ_j^i с ранее найденным законом преобразования (1.117) элементов g_{ij}. Различие между обсуждаемыми формулами преобразований проявляется в том, что выражение (1.133) содержит произведения как частных производных вида $\frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i}$, определяющих контравариантный характер преобразования составляющих вектора (1.111), так и производных $\frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n}$, связанных с ковариантным типом преобразований (1.113). Этим отличием законов преобразований обусловлено и расположение индексов в выражении (1.133) в сравнении с таковым в формуле (1.117). Верхний индекс указывает контравариантный тип преобразований (индекс k в формуле (1.133)), нижний индекс отмечает ковариантный закон преобразований (индекс l в формуле (1.133)).

Записав дифференциальный закон Ома в форме (1.120), как уже отмечалось, воспользовались контравариантными составляющими векторов $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$. Однако ни что не мешает воспользоваться, например, ковариантными составляющими напряжённости электрического поля E_l и контравариантными составляющими плотности тока j^k, придав следующий вид математической форме записи упомянутого закона:

$$j^k = \sigma^{kl} E_l. \tag{1.134}$$

Наконец, с тем же основанием можно записать выражение:

$$j_k = \sigma_{kl} E^l, \tag{1.135}$$

если бы решили использовать ковариантные составляющие плотности тока и контравариантные составляющие вектора напряжённости поля. Выражения (1.134) и (1.135), по аналогии с выражением (1.123), также можно представить в матричной форме записи.

Не вдаваясь в подробности вычислений, последовательность которых полностью повторяет выкладки, приведшие

нас к формулам преобразования (1.133), приведём здесь законы преобразований величин σ^{kl} и σ_{kl}:

$$\tilde{\sigma}^{kl} = \sigma^{ij} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \frac{\partial \tilde{q}^l}{\partial q^j}, \tag{1.136}$$

$$\tilde{\sigma}_{kl} = \sigma_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l}. \tag{1.137}$$

Ниже, после введения понятия тензора, присвоим величинам σ_l^k, σ^{kl}, σ_{kl} соответствующие названия. Подчеркнём, что на данном этапе важными для нас являются лишь законы преобразований, определяемые формулами (1.133), (1.136) и (1.137).

Обратимся к примеру из электростатики и представим, что имеем дело с анизотропным диэлектриком. Важной характеристикой поля в диэлектрической среде является вектор электрической индукции $\boldsymbol{D}$, который в случае анизотропной среды, вообще говоря, не параллелен вектору электрической напряжённости $\boldsymbol{E}$. В линейном приближении составляющие вектора $\boldsymbol{D}$ линейно зависят от составляющих вектора $\boldsymbol{E}$. Последнее означает соотношения вида:

$$D^k = \varepsilon_l^k E^l, \tag{1.138}$$

определяющие связи контравариантных составляющих вектора индукции и вектора напряжённости электрического поля; ε_l^k — набор чисел, характеризующий диэлектрические свойства среды. Соотношения (1.138) между составляющими вектора напряжённости электрического поля и вектора индукции находят своё применение, например, в кристаллооптике. Объяснения таких фактов, как возможность распространения в заданном направлении двух плоских линейно поляризованных волн с различными скоростями переноса энергии световых лучей или явление двойного лучепреломления на границе изотропной и анизотропной сред, основано на использовании уравнений связи (1.138).

Выражения (1.120) и (1.138) отличаются лишь обозначениями, поэтому закон преобразования величин ε_l^k и установленный ранее закон преобразования (1.133) величин σ_l^k совпадают. На этом основании можно утверждать, что формулы, выражающие закон преобразования величин ε_l^k, имеют вид:

$$\tilde{\varepsilon}_l^k = \varepsilon_j^i \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l}. \qquad (1.139)$$

Рассмотрим ещё один пример, относящийся к теории упругости. Выделим в теле элемент объёма, ограниченный замкнутой поверхностью. Выберем на ней элемент поверхности, положение которого зададим вектором внешней единичной нормали $\boldsymbol{n}$. Обозначим силу, действующую на единицу площади выделенного элемента поверхности вектором $\boldsymbol{T}$, и назовём эту величину напряжением. Вектор напряжения в газовых и жидких средах направлен в сторону, противоположную вектору внешней нормали $\boldsymbol{n}$, и его абсолютная величина, называемая давлением p, не зависит от ориентации единичной площадки, что, собственно, и составляет содержание закона Паскаля. Отмеченное свойство газовых и жидких сред, при использовании контравариантных составляющих вектора $\boldsymbol{T}$ и вектора нормали $\boldsymbol{n}$, запишем в виде последовательности равенств:

$$T^i = -pn^i = -p\delta_j^i n^j, \qquad (1.140)$$

из которых последнее понадобится несколько позже. Однако в случае анизотропных тел вектор напряжения не будет совпадать с направлением нормали, более того, каждому направлению нормали соответствует свой вектор напряжения. В общем случае любая составляющая T^i зависит от всех составляющих вектора $\boldsymbol{n}$, что можно представить в виде:

$$T^i = \tau_j^i n^j. \qquad (1.141)$$

Обсудим значение формулы (1.141). Для приложений важным является ответ на вопрос определения напряжения $\boldsymbol{T}$ для любого направления вектора нормали к единичной

площадке, который даётся выражением (1.141). Из формулы (1.141) видно, что для определения составляющих T^i вектора $\boldsymbol{T}$ необходимо знание набора девяти величин τ_j^i, которые находятся как решения соответствующих уравнений механики сплошных сред.

Что касается закона преобразования величин τ_j^i, то из сравнения выражений (1.120) и (1.141), которые разнятся лишь обозначениями, немедленно следует вывод о виде формул преобразования величин τ_j^i, которые совпадают с выражением (1.133) преобразований величин σ_l^k, т. е.:

$$\tilde{\tau}_l^k = \tau_j^i \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l}. \qquad (1.142)$$

Если воспользоваться другими комбинациями контравариантных и ковариантных составляющих векторов напряжения и нормали к единичной площадке, то в дополнение к выражению (1.141) получим соотношения вида:

$$T^i = \tau^{ij} n_j, \qquad (1.143)$$

$$T_i = \tau_{ij} n^j. \qquad (1.144)$$

Относительно законов преобразования набора элементов τ^{ij} и τ_{ij} можно сделать заключение, что они, по не раз упоминавшийся причине, совпадают с законами преобразований (1.136) и (1.137) величин σ^{ij} и σ_{ij}.

Основной вывод, который можно сделать из вышерассмотренных примеров, заключается в том, что наборы элементов σ^{ij}, ε^{ij} и τ^{ij}, которые относятся к описанию различных категорий физических свойств тел, подчиняются одному и тому же закону преобразования элементов. Точно также, по своим законам, преобразуются наборы элементов σ_j^i, ε_j^i, τ_j^i и σ_{ij}, ε_{ij}, τ_{ij}. Эта формальная общность законов преобразований порождает возможность рассматривать их как один класс математических объектов — так называемых тензоров, к определению которых и перейдём.

Если для каждой системы координат q^α определена совокупность n^2 функций $A^{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат:

$$q^\alpha = q^\alpha(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \ldots, \tilde{q}^n) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.145}$$

преобразуются по формулам:

$$\tilde{A}^{ik} = A^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^\beta}, \tag{1.146}$$

то будем говорить, что эти функции являются ***контравариантными составляющими тензора второго ранга*** *в пространстве n измерений.*

Термин «второго ранга» указывает на число индексов в обозначении составляющих тензора $A^{\alpha\beta}$.

Сравнивая законы преобразований набора величин σ^{ij}, ε^{ij} и τ^{ij}, определяемые формулами (1.136), (1.139) и (1.142) с соотношением (1.146), приходим к заключению, что каждая из совокупностей величин σ^{ij}, ε^{ij} и τ^{ij} представляет собой контравариантные составляющие тензора проводимости, диэлектрической проницаемости и тензора напряжений соответственно. Дадим теперь определение ковариантных составляющих тензора второго ранга.

Если для каждой системы координат q^α определена совокупность n^2 функций $A^{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат:

$$q^\alpha = q^\alpha(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \ldots, \tilde{q}^n) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.147}$$

преобразуются по формулам:

$$\tilde{A}_{ik} = A_{\alpha\beta} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \tilde{q}^i} \frac{\partial q^\beta}{\partial \tilde{q}^k}, \tag{1.148}$$

то будем говорить, что эти функции являются ***ковариантными составляющими тензора второго ранга*** *в пространстве n измерений.*

Ранг равен числу индексов, присутствующих в обозначении составляющих $A_{\alpha\beta}$.

Формулы (1.137), определяющие законы преобразований элементов σ_{kl}, совпадают с формулами преобразований (1.148) в только что приведённом определении. Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что это утверждение справедливо и в отношении величин ε_{kl}, τ_{kl}. На этом основании можно утверждать, что σ_{kl}, ε_{kl}, τ_{kl} следует рассматривать как ковариантные составляющие тензоров проводимости, диэлектрической проницаемости и тензора напряжений, каждый из которых есть тензор второго ранга.

Ведём ещё понятие смешанного тензора второго ранга.

Если для каждой системы координат q^α определена совокупность n^2 функций A^α_β, которые при преобразовании координат:

$$q^\alpha = q^\alpha(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \ldots, \tilde{q}^n) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.149}$$

преобразуются по формулам:

$$\tilde{A}^i_k = A^\alpha_\beta \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\beta}{\partial \tilde{q}^k}, \tag{1.150}$$

то будем говорить, что эти функции ***являются смешанными составляющими тензора второго ранга*** *в пространстве n измерений.*

В силу этого определения совокупности функций σ^i_j, ε^i_j, τ^i_j будем называть смешанными составляющими соответственно тензоров проводимости, диэлектрической проницаемости и тензора напряжений.

Обобщим понятия тензора второго ранга и введём определение тензора ранга $(p + q)$: p раз контравариантного и q раз ковариантного.

Если для каждой системы координат q^α определена совокупность $n^{(p+q)}$ функций $A^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q}$, которые при преобразовании координат:

$$q^\alpha = q^\alpha(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \ldots, \tilde{q}^n) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.151}$$

преобразуются по формулам:

$$\tilde{A}^{i_1,i_2,\ldots,i_p}_{k_1,k_2,\ldots,k_q} = A^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q} \frac{\partial \tilde{q}^{i_1}}{\partial q^{\alpha_1}} \frac{\partial \tilde{q}^{i_2}}{\partial q^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial \tilde{q}^{i_p}}{\partial q^{\alpha_p}} \frac{\partial q^{\beta_1}}{\partial \tilde{q}^{k_1}} \frac{\partial q^{\beta_2}}{\partial \tilde{q}^{k_2}} \cdots \frac{\partial q^{\beta_q}}{\partial \tilde{q}^{k_q}}, \tag{1.152}$$

то будем говорить, что эти функции являются ***p раз контравариантными и q раз ковариантными смешанными составляющими тензора ранга*** $(p + q)$ *в пространстве n измерений.*

Заметим теперь, что, с точки зрения общего определения, вектор, задаваемый компонентами A^α, можно назвать контравариантным тензором первого ранга, а в случае задания составляющими A_α будем называть вектор ковариантным тензором первого ранга.

Во всех ранее рассмотренных примерах составляющие тензоров проводимости, диэлектрической проницаемости и тензора натяжений возникли как величины, связывающие составляющие одного вектора с составляющими другого вектора. Характер связей в обсуждаемых примерах в математическом отношении одинаков и укладывается, в зависимости от выбора формы записи векторов, в ковариантных или контравариантных составляющих, в одно из следующих соотношений:

$$B^k = \alpha^{kl} A_l, \tag{1.153}$$

$$B_k = \alpha_{kl} A^l, \tag{1.154}$$

$$B^k = \alpha^k_l A^l. \tag{1.155}$$

Было установлено, и это главное, что наборы величин α^{kl}, α_{kl}, α_l^k при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по законам (1.146), (1.148) и (1.150), иными словами, являются тензорами второго ранга дважды контравариантным, дважды ковариантным и тензором смешанного типа соответственно.

Таким образом, можно сделать утверждение в форме теоремы.

Если для любого вектора A_l величины $\alpha^{kl}A_l$ образуют составляющие контравариантного вектора B^k, то α^{kl} — сутьсоставляющие контравариантного тензора.
Аналогичные утверждения имеют место и при выполнении соотношений (1.154) *и* (1.155)*, в которых идёт речь о тензорном характере величин α^{kl} и α_l^k.*

Эта теорема оказывается полезным критерием распознания тензорной природы различных величин, что будет продемонстрировано в примере в пункте 3.5. Наконец, заметим, что в тензорной алгебре устанавливается совокупность теорем, обобщающих вышеприведённый критерий на случай тензоров любого ранга.

В рамках изложенного материала, относящегося к тензорному исчислению, были достаточно подробно рассмотрены исходные понятия, такие как контравариантные и ковариантные составляющие вектора, их связь с физическими составляющими в ортогональных координатах, определили понятие тензора. Этих сведений вполне достаточно для решения широкого спектра задач механики движения частиц.

Понятие тензора заключает в себе важное прикладное значение, которое можно оценить на уровне следующих рассуждений. Вновь обратимся к уравнениям (1.120), (1.138) и (1.141). Каждое из них является материальным уравнением, описывающим физическое явление или состояние среды. Уравнение (1.120) есть обобщение дифференциального закона Ома, (1.138) — материальное уравнение Максвелла в анизотропной диэлектрической среде, тензор τ_j^i в (1.141) опи-

сывает напряжённое состояние тела. В перечисленных уравнениях присутствуют тензоры электрической проводимости, диэлектрической проницаемости и тензор напряжений, которыми характеризуются свойства среды при исследовании процесса протекания электрического тока, при наличии электрического поля или напряжённого состояния соответственно. Так как каждый из перечисленных тензоров есть тензор второго ранга, то становится понятым, что состояние среды задаётся не более, чем девятью величинами и, что особенно важно, закон преобразования этих величин известен. Это обстоятельство позволяет, в целях упрощения аналитического исследования процесса, перейти к такой системе координат, в которой тот или иной тензор принимает в определённом смысле наиболее простой вид — например матрица, соответствующая тензору, становится диагональной (в этом случае говорят о диагональном тензоре). Так, в физической оптике анизотропных однородных кристаллов (в кристаллооптике) при изучении распространения электромагнитных волн в прозрачных средах (не поглощающих световые волны) доказывается, что тензор диэлектрической проницаемости симметричный:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \tag{1.156}$$

и его составляющие — вещественные величины. Таким образом, он определяется не более чем шестью величинами в любой системе координат. Ограничимся далее изучением тензора ε_{ij} в прямоугольных декартовых координатах и воспользуемся теоремой линейной алгебры, согласно которой для любой симметричной вещественной матрицы существует такая ортогональная система декартовых координат, в которой она принимает диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.157}$$

В нашем случае речь идёт о матрице, соответствующей тензору ε_{ij}. Назовём эту систему координат системой главных осей или главных направлений. Итак, тензор диэлектрической проницаемости однородного прозрачного кристалла в системе главных осей определяется тремя числами. Именно этой системе координат отдают предпочтение в исследованиях по распространению световых волн в анизотропных кристаллах.

§ 2. ЧАСТНЫЕ СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

В качестве частных примеров криволинейных ортогональных координат, важных с точки зрения решения прикладных задач, рассмотрим цилиндрические и сферические координаты.

2.1. Цилиндрические координаты

В цилиндрических координатах положение точки задаётся тремя координатами:

$$q^1 = \rho, \quad \rho \geqslant 0;$$

$$q^2 = \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \tag{2.1}$$

$$q^3 = z, \quad -\infty < z < \infty,$$

имеющими следующий геометрический смысл (рис. 3): ρ — расстояние от точки P до оси z; φ — угол, отсчитываемый против хода часовой стрелки между положительным направлением оси x и проекцией на плоскость xOy радиус-вектора, проведённого в точку P; z — координата декартовой системы координат.

В целях изучения цилиндрических координат наметим программу действий, которая полностью повторяет ход рассуждений вышеизложенной общей теории: на первом шаге установим вид зависимостей координат x, y, z от криволинейных координат ρ, φ, z; далее рассмотрим расположение координатных линий и поверхностей, что позволит представить пространственное расположение базисных векторов. На заключительном этапе вычислим коэффициенты Ламе и дадим

вывод математической формы записи единичных базисных векторов. На основе полученных выражений для единичных базисных векторов докажем свойство ортогональности цилиндрических координат.

Формулы (1.3) общей теории теперь приобретают конкретный вид:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{2.2}$$

что легко установить из геометрических соображений в соответствии с рисунком 3. Там же показаны три координатные линии: ρ-, φ- и *z*-линии, проходящие через заданную точку *P*.

Обратите внимание, что вдоль каждой линии изменяется по одной криволинейной координате. Пусть точка *P* определена координатами ρ, φ, *z*. Координатная поверхность $q^1 = \rho =$ = Const. есть геометрическое место точек, равноудалённых от оси *z*, и представляет собой поверхность цилиндра радиуса ρ, что и обусловливает название этих координат. Поверхность $q^2 = \varphi =$ Const. — это полуплоскость (составляющая угол φ с осью *x*), проходящая через ось *z* и точку *P*. Координатная поверхность $q^3 = z =$ Const. — плоскость, проходящая через точку *P* параллельно плоскости *xOy*. Теперь, зная расположение координатных линий и поверхностей, не трудно представить направления единичных базисных векторов. Для построения векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ в точке *P* построим векторы, касательные к координатным линиям ρ, φ, *z* в этой точке, и обозначим их как $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ (рис. 4). Из геометрических соображений понятно, что построенные векторы образуют ортогональный базис (*докажите*). Перейдём к вычислению выражений для единичных векторов $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ и коэффициентов Ламе:

$$H_1 = H_\rho, \quad H_2 = H_\varphi, \quad H_3 = H_z.$$

Подставим в (1.15) выражения (2.2) и вычислим частную производную по $q^1 = \rho$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1} \to \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}. \tag{2.3}$$

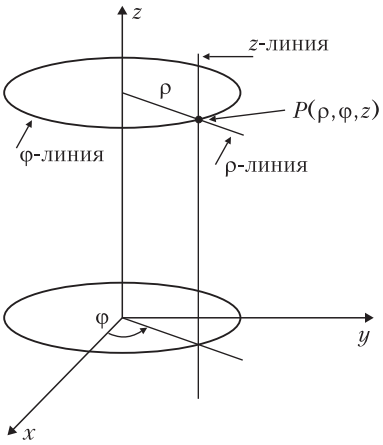

Рис. 3. Геометрический смысл цилиндрических координат ρ, φ, *z* и вид координатных линий

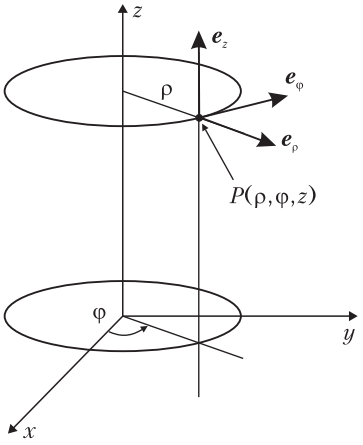

Рис. 4. Расположение базисных векторов цилиндрической системы координат, построенных в точке *P*

Для вычисления коэффициента H_ρ, следуя определению (1.14), находим длину вектора $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}$ (2.3):

$$H_\rho = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\right| = \sqrt{\left(\cos\varphi\right)^2 + \left(\sin\varphi\right)^2} = 1. \qquad (2.4)$$

По такой же схеме, используя (1.15) и (2.2), вычислим частные производные по $q^2 = \varphi$ и $q^3 = z$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2} \to \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \rho\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}, \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3} \to \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}. \qquad (2.6)$$

Принимая во внимание выражения (2.5) и (2.6), вычислим длины векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}$ и $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}$. В результате для коэффициентов H_φ, H_z будем иметь:

$$H_\varphi = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right| = \sqrt{\left(\rho\cos\varphi\right)^2 + \left(\rho\sin\varphi\right)^2} = \left|\rho\right| = \rho, \qquad (2.7)$$

$$H_z = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right| = 1. \qquad (2.8)$$

В (2.7) учтено, что согласно (2.1) $\rho \geqslant 0$.

Коэффициенты H_ρ, H_φ, H_z будут неоднократно использоваться, поэтому имеет смысл собрать их в одном месте:

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1. \qquad (2.9)$$

Выражения для базисных векторов $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ определяются общими соотношениями (1.10). Подставляя в них значения коэффициентов Ламе (2.9) цилиндрической системы координат и частных производных (2.3), (2.5) и (2.6), найдём представления для интересующих нас векторов:

$$\boldsymbol{e}_\rho = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j}, \qquad (2.10)$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}, \qquad (2.11)$$

$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k}. \qquad (2.12)$$

Ранее уже отмечалось, что цилиндрические координаты относятся к криволинейным ортогональным координатам. Для доказательства составим попарные скалярные произведения векторов (2.10)–(2.12), которые, как легко видеть, равны нулю:

$$(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi) = 0, \quad (\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_z) = 0, \quad (\boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z) = 0, \qquad (2.13)$$

что и доказывает ортогональность цилиндрических координат.

2.2. Сферические координаты

В сферических координатах положение точки задаётся тремя координатами:

$$q^1 = r, \quad r \geqslant 0;$$

$$q^2 = \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi; \qquad (2.14)$$

$$q^3 = \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

имеющими следующий геометрический смысл (рис. 5): r — расстояние от точки P до начала координат; θ — угол между положительным направлением оси z и радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, проведённым из начала координат в точку P; φ — угол между положительным направлением оси x и проекцией на плоскость xOy радиус-вектора $\boldsymbol{r}$.

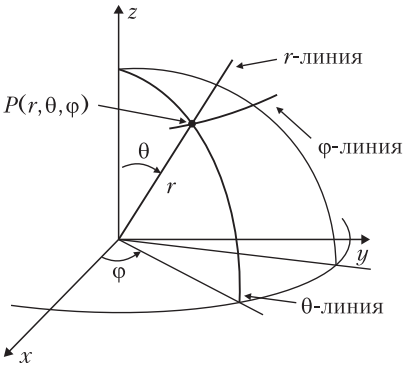

Рис. 5. Геометрический смысл сферических координат r, θ, φ и вид координатных линий

При исследовании сферических координат снова будем следовать ходу рассуждений вышеизложенной общей теории: на первом шаге установим вид зависимостей координат x, y, z от криволинейных координат r, θ, φ; далее рассмотрим расположение координатных линий и поверхностей, что позволит представить пространственное расположение базисных векторов; и, как заключительный этап вычислим коэффициенты Ламе, а также установим выражения для единичных базисных векторов $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ сферических координат. На основе полученных выражений для единичных базисных векторов докажем свойство ортогональности сферических координат.

Формулы (1.3) общей теории теперь принимают вид:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \quad (2.15)$$

что легко установить из геометрических соображений в соответствии с рисунком 5. Там же показаны три координатные линии: r-, θ- и φ-линии, проходящие через заданную точку P, координаты которой равны r, θ, φ. Рекомендуем убедиться, что вдоль каждой из них изменяется по одной криволинейной координате.

Пусть точка P определена значениями координатов r, θ, φ. Координатная поверхность $q^1 = r = \text{Const}$. есть геометрическое место точек, равноудалённых от начала координат, и является поверхностью сферы радиуса r, что и обусловливает название этих координат. Координатная поверхность $q^2 = \theta = \text{Const}$. — это конус, образующая которого составляет угол θ с осью z и проходящий через точку P. Координатная поверхность $q^3 = \varphi = \text{Const}$. — полуплоскость, проходящая через точку P, ось z, и составляющая угол φ с осью x. Теперь, зная расположение координатных линий и поверхностей, не трудно представить направления единичных базисных векторов. Для построения векторов $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ в точке P проведём векторы, касательные к координатным линиям r, θ, φ в этой точке, и обозначим их как $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ (рис. 6). Из геометрических соображений понятно, что построенные векторы образуют ортогональный базис (*докажите*).

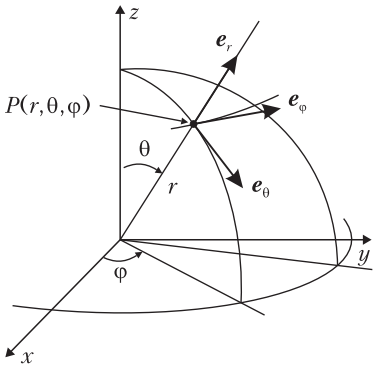

Рис. 6. Расположение базисных векторов сферической системы координат, построенных в точке P

Так, перейдём к вычислению выражений для единичных векторов $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ и коэффициентов Ламе:

$$H_1 = H_r, \quad H_2 = H_\theta, \quad H_3 = H_\varphi.$$

Подставим в (1.15) выражения (2.15) и вычислим частную производную по $q^1 = r$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1} \to \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}. \qquad (2.16)$$

Для вычисления коэффициента H_r, согласно определению (1.14), находим длину вектора $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}$ из уравнения (2.16):

$$H_r = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right| = \\ = \sqrt{\left(\sin\theta\cos\varphi\right)^2 + \left(\sin\theta\sin\varphi\right)^2 + \left(\cos\theta\right)^2} = 1. \quad (2.17)$$

По такой же схеме, используя (1.15) и (2.15), вычислим частные производные по $q^2 = \theta$ и $q^3 = \varphi$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2} \to \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - r\sin\theta\,\boldsymbol{k}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3} \to \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}. \quad (2.19)$$

Теперь остаётся вычислить длины векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}$ и $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}$. В результате для коэффициентов H_θ, H_φ будем иметь:

$$H_\theta = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right| = \sqrt{\left(r\cos\theta\cos\varphi\right)^2 + \left(r\cos\theta\sin\varphi\right)^2 + \left(r\sin\theta\right)^2} = \\ = \left|r\right| = r, \quad (2.20)$$

$$H_\varphi = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right| = \sqrt{\left(r\sin\theta\sin\varphi\right)^2 + \left(r\sin\theta\cos\varphi\right)^2} = \\ = \left|r\sin\theta\right| = r\sin\theta. \quad (2.21)$$

В формулах (2.20) и (2.21) учтено, что, согласно (2.14), $r \geqslant 0$ и $\sin\theta \geqslant 0$.

Соберём коэффициенты H_r, H_θ, H_φ в одном месте:

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta. \tag{2.22}$$

Выражения для базисных векторов $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ определяются общими соотношениями (1.10). Подставляя в эти соотношения значения коэффициентов (2.22) и частных производных (2.16), (2.18) и (2.19), найдём представления для интересующих нас векторов:

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}, \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k}, \tag{2.24}$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}. \tag{2.25}$$

Легко проверить, что попарные скалярные произведения векторов $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ равны нулю. Следовательно, указанные векторы взаимно ортогональны. Это свойство базисных векторов сферических координат рекомендуется установить самостоятельно на основе геометрического подхода.

2.3. Выражение для градиента в цилиндрических и сферических координатах

Перед тем как приступить к выводу указанных в названии выражений, остановимся на значении понятия градиента. Вектор градиента скалярного поля $u = u(x, y, z)$, или дифференциальный оператор градиента, действующий на скалярное поле u, определён в декартовой системе координат равенством (1.20), которое для удобства здесь воспроизведём:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{2.26}$$

Внимание к этому оператору обусловлено не только наличием у него свойств, отмеченных после формулы (1.20), что сыграло основную роль при построении базисных векторов вторым способом, но и его широким применением в формулировках целого ряда физических закономерностей. Так, вектор напряжённости электрического поля $\boldsymbol{E}$ в электростатике связан с электрическим потенциалом φ соотношением:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{2.27}$$

а векторы плотности потока частиц $\boldsymbol{j}$ вследствие диффузии и плотности потока тепла $\boldsymbol{j}_q$ в неоднородно нагретом теле определяются соответственно выражениями:

$$\boldsymbol{j} = -\operatorname{grad} c, \quad \boldsymbol{j}_q = -\chi \operatorname{grad} T.$$

Здесь в первом выражении: c — концентрация частиц, D — коэффициент диффузии; во втором: T — температура среды, χ — коэффициент теплопроводности. Концентрация и температура в общем случае являются функциями координат точки среды и времени. Присутствующий во всех трёх формулах знак (–) означает, что векторы $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}_q$ направлены в сторону *убывания* электрического потенциала, концентрации частиц и температуры соответственно (в то время как градиент направлен в сторону возрастания скалярных полей φ, c, T).

Переход от декартовых координат к новым координатам, в частности к криволинейным ортогональным координатам, во многих случаях упрощает технику решения задач. При этом может возникнуть необходимость вычисления градиента скалярного поля в новых координатах. Так как в приложениях чаще всего используются *ортогональные* криволинейные координаты, то ранее ограничились выводом формулы градиента (1.62) именно для этих координат, которая имеет вид:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_3. \tag{2.28}$$

Согласно приведённой формуле, выражение для градиента в конкретной системе координат получается подстановкой в (2.28) соответствующих этой системе координат коэффициентов Ламе, набора переменных q^1, q^2, q^3 и базисных векторов.

Так, в результате подстановки коэффициентов Ламе (2.9), переменных (2.1) и обозначений базисных векторов $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$, найдём выражение градиента в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \qquad (2.29)$$

Как результат подстановки коэффициентов Ламе (2.22) в (2.28), переменных (2.14) и базисных векторов $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ найдём выражение градиента в сферических координатах:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi. \qquad (2.30)$$

Приведённые выражения находят широкое применение при решении прикладных задач. В следующем пункте рассматривается пример использования формулы (2.30).

2.4. Пример: вычисление напряжённости поля, создаваемого электрическим диполем

Потенциал электрического поля $\varphi_э$, создаваемого электрическим диполем (как доказывается в физике), определяется в системе единиц СИ выражением:

$$\varphi_э = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})}{r^3}. \qquad (2.31)$$

Здесь r — расстояние от центра диполя до точки, в которой рассчитывается потенциал, $\boldsymbol{d}$ — постоянный вектор, назы-

ваемый дипольным моментом; электрическая постоянная и диэлектрическая постоянная однородной среды обозначены как ε_0 и ε соответственно. Требуется найти вектор напряжённости электрического поля $\boldsymbol{E}$.

Решение

Поместим начало координат в центр диполя. Ось z направим вдоль вектора дипольного момента $\boldsymbol{d}$. Угол между радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, проведённому из начала координат в рассматриваемую точку поля P, обозначим через θ. Положение точки P определяется тремя сферическими координатами r, θ, φ. В этих переменных выражение для электрического потенциала (2.31), после раскрытия в числителе скалярного произведения, принимает вид $\left(d = |\boldsymbol{d}|\right)$:

$$\varphi_э = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{dr\cos\theta}{r^3} = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\cos\theta}{r^2}. \qquad (2.32)$$

Согласно электростатической теории, при отыскании напряжённости электрического поля предполагается вычисление градиента (2.27) электрического потенциала. Электрический потенциал (2.32) записан в переменных сферической системы координат. Поэтому определение напряжённости поля приведём с использованием формулы (2.30) и получим:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi_э = -\operatorname{grad}\frac{d}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\cos\theta}{r} = -\frac{d}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\operatorname{grad}\frac{\cos\theta}{r} =$$

$$= -\frac{d}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\frac{\cos\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_\theta + 0\boldsymbol{e}_\varphi\right\}. \qquad (2.33)$$

Здесь при переходе к третьему равенству за знак градиента вынесен постоянный множитель $\frac{d}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}$; в последнем равенстве учтено, что $\varphi_э$ не зависит от сферической переменной φ.

После вычисления частных производных в (2.33) придём к окончательному результату:

$$\boldsymbol{E} = \frac{d}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{d}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta. \qquad (2.34)$$

Тем самым найдено разложение вектора $\boldsymbol{E}$ по базисным векторам сферической системы координат в любой точке пространства.

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ К МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦ

Прикладное значение теории криволинейных координат определяется в значительной мере тем, что эта теория позволяет разработать единую методологию решения широкого спектра прикладных задач и, в частности, задач кинематики и динамики. В рамках этого параграфа на примерах конкретных задач механики подтвердим сделанное утверждение, подчёркивая единый алгоритм их решения. Конечно, потребуются определённые усилия на начальном этапе применения криволинейных координат. После освоения материала вы овладеете системным подходом к анализу задач.

3.1. Кинематика: вектор скорости и его составляющие в ортогональной криволинейной системе координат

Скорость и ускорение частицы относятся в механике к основным кинематическим понятиям. Для начала рассмотрим понятие вектора скорости и ответим на нижеперечисленные вопросы.

1. Найти составляющие вектора скорости $\boldsymbol{v}$ материальной точки в базисе единичных векторов $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ криволинейной системы координат по заданной траектории движения $\{q^1 = q^1(t), q^2 = q^2(t), q^3 = q^3(t)\}$, иными словами, требуется найти физические составляющие. Термин «физические составляющие» употреблён в соответствии с определением (1.36).

2. Найти физические составляющие вектора скорости $\boldsymbol{v}$ материальной точки, выражение для абсолютного значения скорости и кинетической энергии в цилиндрической системе координат.

3. Найти физические составляющие вектора скорости $\boldsymbol{v}$ материальной точки, выражение для абсолютного значения скорости и кинетической энергии в сферических координатах.

Рассмотрим решение первой части задачи. После того, как оно будет найдено, решение второй и третьей частей не потребует никакой логической нагрузки — всё решение сведётся к формальным подстановкам.

Решение первой части задачи

Положение материальной точки в любой момент времени t можно задать координатами $\{x(t), y(t), z(t)\}$ прямоугольной декартовой системы координат или радиус-вектором:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \tag{3.1}$$

конец которого с течением времени описывает кривую линию — траекторию движения.

По аналогии, в криволинейной системе координат положение точки в момент времени t определяется значениями криволинейных координат $\{q^1(t), q^2(t), q^3(t)\}$. Согласно определению криволинейных координат, значения $\{x(t), y(t), z(t)\}$ однозначно связаны с координатами $\{q^1(t), q^2(t), q^3(t)\}$, т. е.:

$$\begin{aligned} x(t) &= x[q^1(t), q^2(t), q^3(t)], \\ y(t) &= y[q^1(t), q^2(t), q^3(t)], \\ z(t) &= z[q^1(t), q^2(t), q^3(t)], \end{aligned} \tag{3.2}$$

в соответствии с формулами (1.3).

Из равенств (3.1) и (3.2) следует, что радиус-вектор рассчитывается по формуле:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) = x[q^1(t), q^2(t), q^3(t)]\boldsymbol{i} + y[q^1(t), q^2(t), q^3(t)]\boldsymbol{j} + \\ + z[q^1(t), q^2(t), q^3(t)]\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r}([q^1(t), q^2(t), q^3(t)]) \end{aligned} \tag{3.3}$$

и, с математической точки зрения, является сложной функцией переменной времени t.

По определению, вектор скорости движения точки равен:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}, \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{r}(t)$ определено выражением (3.3). Для вычисления скорости остаётся воспользоваться правилом вычисления производной сложной функции, следуя которому получим:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}\left(\left[q^1(t),\ q^2(t),\ q^3(t)\right]\right)}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3}\dot{q}^3, \tag{3.5}$$

где для производных криволинейных координат по времени введены обозначения $\dot{q}^i$ ($i = 1, 2, 3$).

Выражение для вектора скорости (3.5) означает разложение вектора $\boldsymbol{v}$ по векторам $\left\{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3}\right\}$, касательным к координатным линиям $\{q^1, q^2, q^3\}$ соответственно. Коэффициенты $\{\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3\}$ в разложении (3.5) есть не что иное, как контравариантные составляющие вектора скорости V^1, V^2, V^3 (по этой причине индексы расположены сверху). Для того чтобы сделать этот вывод, достаточно сравнить выражение (3.5) с определением контравариантных составляющих (1.41). Итак, имеют место равенства:

$$V^i = \dot{q}^i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{3.6}$$

Базисные векторы $\left\{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3}\right\}$ не являются единичными, как этого требует постановка задачи. По условию задачи

следует получить разложение вектора скорости по единичным базисным векторам $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ следующего вида:

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3, \tag{3.7}$$

где $\{v_1, v_2, v_3\}$ — физические составляющие вектора скорости.

Переход к единичным базисным векторам $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ легко осуществить, если принять во внимание определения этих векторов (1.12), которое, для удобства преобразований, здесь приведём:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3}. \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1} = H_1\boldsymbol{e}_1, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2} = H_2\boldsymbol{e}_2, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3} = H_3\boldsymbol{e}_3. \tag{3.9}$$

Подставим найденные значения (3.9) для векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}$ (i =1, 2, 3) в формулу (3.5). В результате, для интересующего нас разложения вектора скорости по единичным базисным векторам криволинейной системы координат, получим:

$$\boldsymbol{v} = \dot{q}^1H_1\boldsymbol{e}_1 + \dot{q}^2H_2\boldsymbol{e}_2 + \dot{q}^3H_3\boldsymbol{e}_3. \tag{3.10}$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (3.7), найдём значения физических составляющих вектора скорости:

$$v_1 = \dot{q}^1H_1, \quad v_2 = \dot{q}^2H_2, \quad v_3 = \dot{q}^3H_3. \tag{3.11}$$

Ниже воспользуемся полученными формулами при решении 2-й и 3-й частей поставленной задачи. Прикладное значение выражений (3.11) состоит в том, что для вычисления составляющих скорости, абсолютного значения скорости, кинетической энергии в конкретной системе координат доста-

точно знания коэффициентов Ламе $\{H_1, H_2, H_3\}$ в этой системе координат, что далее и будет продемонстрировано.

Решение второй части задачи

Для определения физических составляющих вектора скорости $\boldsymbol{v}$ в цилиндрической системе координат следует всего лишь заменить переменные $\{q^1, q^2, q^3\}$ в (3.11) на координаты цилиндрической системы координат $\{\rho, \varphi, z\}$, и подставить известные значения коэффициентов Ламе:

$$H_1 = H_\rho = 1, \quad H_2 = H_\varphi = \rho, \quad H_3 = H_z = 1. \qquad (3.12)$$

Следуя вышесказанному, из (3.11) и (3.12) для физических составляющих скорости $\{v_1 = v_\rho, v_2 = v_\varphi, v_3 = v_z\}$ получим:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}. \qquad (3.13)$$

Остановимся на простом, но важном моменте, относящемся к только что полученным выражениям. Из (3.13) легко усмотреть, что все три составляющие имеют одну и ту же размерность (*проверьте!*). Равенство размерностей в общем виде обеспечивается коэффициентами $\{H_1, H_2, H_3\}$ в выражении (3.10).

Здесь заметим, что если бы стояла задача найти контравариантные составляющие скорости, то ответ на поставленный вопрос легко находится на основании выражений (3.6), в которых следует осуществить замены $q^1 = \rho$, $q^2 = \varphi$, $q^3 = z$. В результате будем иметь:

$$V^\rho = \dot{\rho}, \quad V^\varphi = \dot{\varphi}, \quad V^z = \dot{z}. \qquad (3.14)$$

Естественно, физические составляющие (3.13) можно вычислить по контравариантным составляющим (3.14), следуя формулам общей теории (1.47).

Используя для единичных базисных векторов цилиндрической системы координат обозначения $\{\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z\}$ и выражения

для физических составляющих (3.13), запишем вектор скорости в этом базисе:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z. \qquad (3.15)$$

Так как базисные векторы $\{\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z\}$ взаимно ортогональны, то квадрат длины вектора, а следовательно, и квадрат абсолютного значения скорости равен сумме квадратов его составляющих. Итак, абсолютное значение скорости $v = |\boldsymbol{v}|$ равно:

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\varphi}\right)^2 + \dot{z}^2}. \qquad (3.16)$$

Наконец, совсем просто решается вопрос о виде выражения для кинетической энергии T. По определению:

$$T = \frac{mv^2}{2}, \qquad (3.17)$$

здесь m — масса тела. Осталось подставить (3.16) в это выражение и получить ответ на поставленный вопрос:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\varphi}\right)^2 + \dot{z}^2\right). \qquad (3.18)$$

Решение третьей части задачи

Техника решения этой задачи не содержит ничего нового в сравнении с предыдущим решением, в чём и проявляется прикладное значение общей теории криволинейных координат. Итак, как и ранее, заменим переменные $\{q^1, q^2, q^3\}$ в выражении (3.11) на координаты сферической системы координат $\{r, \theta, \varphi\}$ и подставим соответствующие значения коэффициентов Ламе:

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r\sin\theta. \qquad (3.19)$$

Для физических составляющих вектора скорости $\{v_1 = v_r, v_2 = v_\theta, v_3 = v_\varphi\}$ получим:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\sin\theta\,\dot{\varphi}. \tag{3.20}$$

Как второй вариант решения рекомендуем сначала найти контравариантные составляющие вектора скорости по формулам (3.6), а затем воспользоваться выражениями (1.47) для определения физических составляющих вектора скорости.

В дальнейшем нам понадобится представление вектора скорости в базисе единичных векторов сферической системы координат $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$, которое, если воспользоваться (3.20), имеет вид:

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{3.21}$$

Векторы $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ образуют ортогональный базис сферической системы координат. На основании (3.21) приходим к выводу, что абсолютное значение скорости равно:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + \left(r\sin\theta\dot{\varphi}\right)^2}, \tag{3.22}$$

и вычислим кинетическую энергию в переменных сферической системы координат:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + \left(r\sin\theta\dot{\varphi}\right)^2\right). \tag{3.23}$$

В пункте 3.4 воспользуемся выражениями (3.18) и (3.23) для вывода уравнений движения частицы в цилиндрических и сферических координатах методом Лагранжа.

3.2. Динамика: уравнения движения частицы в ортогональной криволинейной системе координат (второй закон Ньютона)

Как показывает опыт решения прикладных задач, успех решения в значительной мере зависит от выбора системы координат, в которой проводятся вычисления. При удачном выборе криволинейной системы координат математические выражения или уравнения, описывающие процесс, принимают более удобный для анализа проблемы вид.

В силу сказанного, принципиальный интерес для решения задач динамики движения тела представляет вопрос о виде уравнений движения в криволинейных координатах. В такой общей постановке наметим лишь ход рассуждений. Что касается вывода уравнений движения в цилиндрической и сферической системах координат, наиболее часто используемых в теории и приложениях, то он будет проведён со всеми деталями.

Вывод уравнения движения частицы в криволинейной системе координат означает, что нам предстоит записать второй закон Ньютона (массу тела полагаем постоянной):

$$m\boldsymbol{a} = \sum\nolimits_i \boldsymbol{F}^i = \boldsymbol{F} \tag{3.24}$$

в проекциях на базисные векторы $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Здесь m масса тела и $\boldsymbol{F}$ равнодействующая сил $\boldsymbol{F}^i$, приложенных к телу. Ускорение $\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ и, подставляя в это выражение значение скорости (3.10), запишем:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}^1 H_1 \boldsymbol{e}_1 + \dot{q}^2 H_2 \boldsymbol{e}_2 + \dot{q}^3 H_3 \boldsymbol{e}_3\right). \tag{3.25}$$

Следует иметь ввиду, что все сомножители слагаемых в круглой скобке в общем случае зависят от времени. Это следует из того, что коэффициенты $\{H_1, H_2, H_3\}$ и базисные

векторы $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ есть функции координат $\{q^1(t), q^2(t), q^3(t)\}$ движущегося тела.

Принимая во внимание вышесказанное, представим правую часть (3.25) в виде, удобном для дальнейшего обсуждения:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\left(\dot{q}^1 H_1\right)}{dt}\boldsymbol{e}_1 + \frac{d\left(\dot{q}^2 H_2\right)}{dt}\boldsymbol{e}_2 + \frac{d\left(\dot{q}^3 H_3\right)}{dt}\boldsymbol{e}_3 + \\ + \dot{q}^1 H_1 \frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} + \dot{q}^2 H_2 \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} + \dot{q}^3 H_3 \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt}. \qquad (3.26)$$

Как видно из выражения (3.26), на этом этапе вычислений нам не удалось в явном виде найти составляющие вектора ускорения по базисным векторам $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ из-за присутствия в нём последних трёх слагаемых, в которые входят производные базисных векторов по времени. Рассмотрим указанные производные подробнее:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} = \frac{d\boldsymbol{e}_1\left\{q^1(t),\ q^2(t),\ q^3(t)\right\}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q^3}\dot{q}^3, \qquad (3.27)$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} = \frac{d\boldsymbol{e}_2\left\{q^1(t),\ q^2(t),\ q^3(t)\right\}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q^3}\dot{q}^3, \qquad (3.28)$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} = \frac{d\boldsymbol{e}_3\left\{q^1(t),\ q^2(t),\ q^3(t)\right\}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q^3}\dot{q}^3. \qquad (3.29)$$

Оказывается, что присутствующие в (3.27)–(3.29) производные $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q^j}$ (i, j = 1, 2, 3) удаётся вычислить в общем виде через базисные векторы $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. В справочных целях приведём здесь конечные результаты, оставляя в стороне детали вычислений:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q^1} = -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_3,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q^2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_2, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q^3} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_3; \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q^1} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_1, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q^2} = -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_3 - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_1,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q^3} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_3; \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q^1} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_1, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q^2} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_2,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q^3} = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_2. \tag{3.32}$$

Совместное использование представленных здесь формул (3.26)–(3.32) решает вопрос об определении выражения вектора ускорения и виде уравнений движения тела в произвольных криволинейных координатах. Выписывать окончательные выражения не имеет смысла в силу их громоздкости; к тому же, при решении конкретных задач последовательное применение обсуждаемых выражений в направлении от (3.30)–(3.32) к (3.26) не вызывает затруднений, что будет ниже продемонстрировано на примерах вычислений в цилиндрических и сферических координатах.

3.3. Уравнения движения в цилиндрической системе координат

Перейдём к выводу уравнений движения точечного тела (частицы) в цилиндрической системе координат. Для начала запишем выражение для ускорения, заменив в (3.26) величины

$\{q^1, q^2, q^3\}$, $\{H_1, H_2, H_3\}$, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ на соответствующие им величины $\{\rho, \varphi, z\}$, $\{H_\rho, H_\varphi, H_z\}$, $\{\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z\}$ цилиндрической системы координат. Принимая во внимание значения коэффициентов Ламе (2.9), получим:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\left(\dot{\rho}\right)}{dt}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{d\left(\rho\dot{\varphi}\right)}{dt}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{d\left(\dot{z}\right)}{dt}\boldsymbol{e}_z + \dot{\rho}\frac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} + \rho\dot{\varphi}\frac{d\boldsymbol{e}_\varphi}{dt} + \dot{z}\frac{d\boldsymbol{e}_z}{dt} =$$

$$= \ddot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \left(\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z + \dot{\rho}\frac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} + \rho\dot{\varphi}\frac{d\boldsymbol{e}_\varphi}{dt} + \dot{z}\frac{d\boldsymbol{e}_z}{dt}. \qquad (3.33)$$

Присутствующие в этом выражении производные базисных векторов по времени можно вычислить на основе совместного использования формул (3.27)–(3.29) и (3.30)–(3.32) (*проведите соответствующие вычисления самостоятельно*). Однако поступим иначе и выполним программу вывода уравнений, не обращаясь к общим соотношениям (3.27)–(3.29) и (3.30)–(3.32).

Для вычисления производных от базисных векторов в правой части равенства (3.33), воспользуемся следующими рассуждениями. Производная $\frac{d\boldsymbol{e}_z}{dt}$ равна нулю, так как вектор $\boldsymbol{e}_z$ не изменяется при переходе от одной точки к другой. Для определения двух оставшихся производных напомним, что согласно (2.10) и (2.11):

$$\boldsymbol{e}_\rho = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j}, \qquad (3.34)$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}. \qquad (3.35)$$

Зависимость базисных векторов от времени, как уже отмечалось, обусловлена тем, что с течением времени изменяются координаты положения тела. В нашем случае это угол φ, который в общем случае движения тела изменяется. Так, при дифференциации (3.34) с учётом (3.35) имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} = \dot\varphi\left(-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}\right) = \dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{3.36}$$

и, соответственно, если продифференцировать (3.35) и затем учесть (3.34), получим:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\varphi}{dt} = -\dot\varphi\left(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}\right) = -\dot\varphi\boldsymbol{e}_\rho. \tag{3.37}$$

Соберём вместе полученные результаты для производных базисных векторов $\{\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z\}$:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_\varphi}{dt} = -\dot\varphi\boldsymbol{e}_\rho, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_z}{dt} = 0 \tag{3.38}$$

и подставим их значения в выражение (3.33) для вектора ускорения, объединив коэффициенты при равных базисных векторах:

$$\boldsymbol{a} = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi + \ddot z\boldsymbol{e}_z. \tag{3.39}$$

Обозначим составляющие ускорения вдоль направлений базисных векторов $\{\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z\}$ как $\{a_\rho, a_\varphi, a_z\}$ и запишем:

$$\boldsymbol{a} = a_\rho\boldsymbol{e}_\rho + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + a_z\boldsymbol{e}_z. \tag{3.40}$$

Сравнивая выражения (3.39) и (3.40) для компонент ускорения, получим:

$$a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi, \quad a_z = \ddot z. \tag{3.41}$$

Для получения конечного результата достаточно приравнять проекции левой и правой частей уравнения (3.24) и подставить значения проекций ускорения (3.41):

$$m\left(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\right) = \sum\nolimits_i F_\rho^i = F_\rho, \tag{3.42}$$

$$m\left(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)=\sum\nolimits_i F_\varphi^i=F_\varphi, \tag{3.43}$$

$$m\ddot{z}=\sum\nolimits_i F_z^i=F_z, \tag{3.44}$$

где F_ρ^i, F_φ^i, F_z^i — проекции i-й силы на направления векторов $\{\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z\}$ соответственно. Суммы в правых частях этих уравнений можно интерпретировать как составляющие равнодействующей сил, приложенных к телу.

Система полученных уравнений и есть уравнения движения материальной точки в цилиндрической системе координат.

3.4. Примеры задач в цилиндрической системе координат

Сделаем следующие замечания относительно использования системы уравнений (3.42)–(3.44) в разных постановках физических задач.

Если заданы силы, то в общем случае задача сводится к отысканию трёх функций $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$, стоящих под знаками производных нулевого (сами функции), первого и второго порядков. Уравнения, содержащие производные, как известно из дальнейшего прохождения курса математики, называются *дифференциальными уравнениями*. При изучении методов решения дифференциальных уравнений вернёмся к системе (3.42)–(3.44) для некоторых относительно простых задач. Термин «относительно простые задачи» употреблён неслучайно. Дело в том, что рассматриваемая система уравнений к тому же нелинейная, то есть некоторые искомые функции входят в степени, отличной от единицы (например, $\dot{\varphi}^2$) или в произведении ($\rho\ddot{\varphi}$, $\dot{\rho}\dot{\varphi}$). Наконец, сложность анализа задачи в значительной мере определяется характером зависимости сил от времени и координат. Под простыми задачами подразумеваются такие, в которых нелинейность задачи легко

преодолевается или не проявляется в силу особых условий постановки задачи. Некоторые из таких примеров рассмотрены в этом пункте.

Если задана траектория движения в параметрическом виде или некоторая информация о траектории, то в таких задачах обычно требуется найти скорость, ускорение и, при некоторых дополнительных условиях, величины каких-либо сил, действующих на тело. Обратимся к примерам.

Пример № 1

Тело движется вдоль ρ-линии, проходящей в начальный момент времени $t = 0$ через точку с координатами (ρ_0, φ_0, z_0) под действием силы:

$$\boldsymbol{F} = F(\rho)\boldsymbol{e}_\rho. \tag{3.45}$$

Требуется из общих уравнений (3.42)–(3.44) вывести уравнения движения; для случая $F(\rho) = F_0 = \text{Const}$. и решить полученную систему уравнений.

Решение

Для начала проанализируем условие задачи. По данным задачи тело движется вдоль ρ-линии. В цилиндрической системе координат ρ-линия есть прямая, проходящая через заданную точку параллельно плоскости xOy и пересекающая ось z. Следовательно, вдоль кривой движения с течением времени изменяется координата ρ, в то время как координаты (φ, z) остаются неизменными, т. е.:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi_0, \quad z = z_0. \tag{3.46}$$

Для составляющих сил из (3.45) имеем:

$$F_\rho = F(\rho), \quad F_\varphi = 0, \quad F_z = 0. \tag{3.47}$$

Для вывода уравнений подставим (3.46) и (3.47) в систему (3.42)–(3.44) и не забудем, что в нашем случае $\dot{\varphi}$ и $\dot{z}$ равны

нулю. Очевидно, что два последних уравнения выполняются тождественно; в итоге система уравнений относительно $\rho(t)$, φ, z будет иметь вид:

$$m\ddot{\rho} = F(\rho), \tag{3.48}$$

$$\varphi = \varphi_0, \tag{3.49}$$

$$z = z_0. \tag{3.50}$$

Возможность получить окончательное аналитическое решение уравнения (3.48) зависит от вида функции $F(\rho)$. В нашем случае $F(\rho) = F_0 = \text{Const}$. и решение легко находится повторным интегрированием обеих частей (3.48):

$$\rho\left(t\right) = \frac{F_0}{2m}t^2 + v_0 t + \rho_0, \tag{3.51}$$

в котором узнаём хорошо известный результат, относящийся к описанию равноускоренного движения тела под действием постоянной силы. Постоянные интегрирования ρ_0 и v_0 имеют смысл начального значения координаты ρ и начальной скорости. Этот простейший пример рассмотрен лишь с целью адаптации к использованию уравнений (3.42)–(3.44).

Пример № 2

Точечное тело массы m движется по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью ω. Найти вектор ускорения, абсолютное значение ускорения, направление и величину равнодействующих сил, приложенных к телу.

Решение

Обратим внимание, что в задаче задана траектория — окружность. Будем считать, что окружность лежит в плоскости $z = \text{Const}$.; в этом случае $\rho = R$, и угловая скорость $\dot{\varphi} = \omega$.

Всё решение этой простейшей задачи сводится к подстановке значений:

$$\rho = R, \quad \dot{\varphi} = \omega = \text{Const.}, \quad z = \text{Const.}, \tag{3.52}$$

в ранее установленные выражения (3.41) для компонент вектора ускорения, а именно:

$$\begin{aligned} &a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \quad \text{при } \rho = R \text{ и } \dot{\varphi} = \omega = \text{Const.}, \\ &a_\rho = -\omega^2 R; \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned} &a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \quad \text{при } \rho = R \text{ и } \dot{\varphi} = \omega = \text{Const.}, \\ &a_\varphi = 0; \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} &a_z = \ddot{z} \quad \text{при } z = \text{Const.}, \\ &a_z = 0. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Итак, составляющие ускорения найдены на уровне формальной подстановки. Вектор ускорения вычисляется по формуле (3.40), в которую следует подставить только что найденные значения $\{a_\rho, a_\varphi, a_z\}$ и, очевидно, равен:

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 R\boldsymbol{e}_\rho + (0)\boldsymbol{e}_\varphi + (0)\boldsymbol{e}_z. \tag{3.56}$$

Выводы из этого выражения:

1) абсолютное значение ускорения равно $\omega^2 R$;

2) вектор ускорения направлен в сторону, противоположную вектору $\boldsymbol{e}_\rho$, то есть по радиусу к центру окружности.

Надлежащие определению составляющие равнодействующей силы, как уже отмечалось, равны правым частям уравнений (3.42)–(3.44). Записывая их справа налево, в результате подстановок выражений (3.53)–(3.55) найдём составляющие:

$$\begin{aligned} F_\rho &= \sum\nolimits_i F_\rho^i = -mR\omega^2, \\ F_\varphi &= \sum\nolimits_i F_\varphi^i = 0, \\ F_z &= \sum\nolimits_i F_z^i = 0 \end{aligned} \tag{3.57}$$

и, наконец, равнодействующую сил $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = F_\rho \boldsymbol{e}_\rho + F_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + F_z \boldsymbol{e}_z = -m\omega^2 R \boldsymbol{e}_\rho + (0)\boldsymbol{e}_\varphi + (0)\boldsymbol{e}_z. \qquad (3.58)$$

Выводы из этого выражения:

1) абсолютное значение равнодействующей сил $\boldsymbol{F}$ равно $m\omega^2 R$;

2) сила $\boldsymbol{F}$ направлена в сторону, противоположную вектору $\boldsymbol{e}_\rho$, то есть по радиусу к центру окружности.

Тем самым были воспроизведены хорошо известные в рамках школьного курса механики результаты анализа вращательного движения по окружности с постоянной угловой скоростью как частный случай общего подхода.

Пример № 3

В вышеразобранном примере велись рассуждения при условиях:

$$\rho = R, \quad \dot{\varphi} = \omega = \text{Const.}, \quad z = \text{Const.} \qquad (3.59)$$

Давайте теперь усложним задачу в следующем отношении — откажемся от постоянства угловой скорости и будем считать ω функцией времени. Условия задачи запишем в виде:

$$\rho = R, \quad \boldsymbol{\dot{\varphi} = \omega = \omega(t)}, \quad z = \text{Const.} \qquad (3.60)$$

Жирным шрифтом отмечены внесённые изменения в постановке задачи.

Решение

Займёмся определением компонент вектора ускорения и его абсолютного значения. Постараемся в этом случае ответить на вопросы, сформулированные в примере № 2, и проследим, что изменится в наших выводах по сравнению с выводами в предыдущем примере.

Как и ранее, подставим данные условий (3.60) в выражения (3.41) для компонент вектора ускорения. Результаты подстановки представим для последующего сравнения с примером № 2 в той же форме (3.53)–(3.55):

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \quad \text{при } \rho = R \text{ и } \dot{\varphi} = \omega = \omega(t),$$
$$a_\rho = -\omega^2 R; \tag{3.61}$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \quad \text{при } \rho = R \text{ и } \dot{\varphi} = \omega = \omega(t),$$
$$a_\varphi = \dot{\omega}R; \tag{3.62}$$

$$a_z = \ddot{z} \quad \text{при } z = \text{Const.},$$
$$a_z = 0. \tag{3.63}$$

В сравнении с примером № 2 обнаруживается новый момент — кроме составляющей $a_\rho = -\omega^2 R$, совпадающей по форме с (3.53), именуемой центростремительным или нормальным ускорением, возникает составляющая a_φ вдоль вектора $\boldsymbol{e}_\varphi$, касательного к окружности. Величина $a_\varphi = \rho\dot{\omega}$ называется тангенциальной составляющей ускорения. Она, как это видно из (3.62), пропорциональна производной угловой скорости, иными словами, угловому ускорению.

Вектор ускорения вычисляется по формуле (3.40), в которую следует подставить значения $\{a_\rho, a_\varphi, a_z\}$ из (3.61)–(3.63). В результате получим:

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 R\boldsymbol{e}_\rho + \dot{\omega}R\boldsymbol{e}_\varphi + (0)\boldsymbol{e}_z \tag{3.64}$$

и здесь же приведём выражение для длины вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\left(\omega^2 R\right)^2 + \left(R\dot{\omega}\right)^2}. \tag{3.65}$$

Пример № 4

Узкая длинная трубка, перпендикулярная оси z, вращается вокруг неё с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega = \text{Const}$. против часовой стрелки. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней без трения.

1. Найти вид уравнений движения шарика.

2. Найти зависимость координаты положения шарика ρ от времени и равнодействующую силу, действующую на него в функции времени, если в начальный момент шарик находился на оси вращения и имел начальную скорость $v_0 > 0$.

Решение

Обсудим, в каком отношении поставленная задача усложнена в сравнении с примером № 2. Напомним, что переменные ρ и φ удовлетворяли условиям:

$$\rho = R, \quad \dot{\varphi} = \omega = \text{Const.}, \quad z = \text{Const.}$$

В рассматриваемом примере № 4 шарик движется вдоль трубки, следовательно, изменяется не только координата φ, но и расстояние $\rho = \rho(t)$ от оси z до шарика. Следовательно, для координат положения шарика имеют место условия движения:

$$\rho = \rho(t), \quad \dot{\varphi} = \omega = \text{Const.}, \quad z = \text{Const.}, \qquad (3.66)$$

из которых ясно, что $\ddot{\varphi} = 0$ и $\ddot{z} = 0$. Что касается равнодействующих сил:

$$\boldsymbol{F} = F_\rho \boldsymbol{e}_\rho + F_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + F_z \boldsymbol{e}_z, \qquad (3.67)$$

действующих на шарик (рис. 7), то составляющая $F_\rho = 0$ (шарик скользит без трения), $F_z = N - mg$, а F_φ, как будет видно, определится из системы уравнений.

Таким образом, решение задачи сводится к подстановке данных строки (3.66) и составляющих вектора $\boldsymbol{F}$ в систему уравнений (3.42)–(3.44), что и приводит к искомому ответу на первый вопрос:

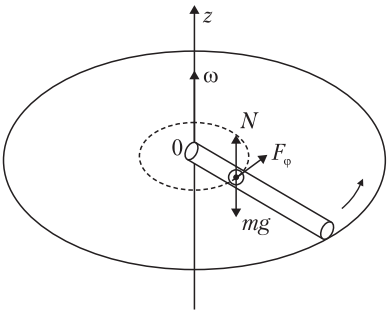

Рис. 7. Силы, действующие на шарик в примере № 4

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) = 0, \qquad (3.68)$$

$$2m\dot{\rho}\dot{\varphi} = 2m\dot{\rho}\omega = F_\varphi, \qquad (3.69)$$

$$m\ddot{z} = 0 = N - mg = F_z. \qquad (3.70)$$

Теперь перейдём ко второму вопросу. Из полученной системы уравнений видно, что первое уравнение не зависит

от остальных и является однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами относительно функции $\rho = \rho(t)$. Однородным это уравнение называется по той причине, что правая часть уравнения (3.68) равна нулю. После деления (3.68) на m получим:

$$\ddot{\rho} - \omega^2 \rho = 0. \tag{3.71}$$

Алгоритм решения однородных уравнений с постоянными коэффициентами сводится к простым действиям, которые покажем на примере только что выведенного уравнения. Частное решение ищется в виде $\rho(t) = e^{\gamma t}$, где γ — константа, подлежащая определению. Подставим предполагаемый вид решения в дифференциальное уравнение (3.71) и учтём, что $\ddot{\rho}(t) = \gamma^2 e^{\gamma t}$. Сократив на множитель $e^{\gamma t}$, придём к квадратному уравнению относительно искомого параметра γ:

$$\gamma^2 - \omega^2 = 0. \tag{3.72}$$

Корни этого уравнения $\gamma_1 = \omega$ и $\gamma_2 = -\omega$ действительные и различные. Подставляя вместо γ значения γ_1 и γ_2 в $e^{\gamma t}$, получим два различных действительных частных решения:

$$e^{\omega t} \quad \text{и} \quad e^{-\omega t}. \tag{3.73}$$

Общее решение, согласно теории дифференциальных уравнений, строится как линейная комбинация частных решений (3.73):

$$\rho(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}, \tag{3.74}$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 находятся из начальных условий (см. пункт 2 формулировки текущего примера). В нулевой момент времени шарик находился на оси z, т. е. $\rho = 0$. Из этого условия и (3.74) следует одно из уравнений для определения неизвестных постоянных C_1 и C_2, а именно:

$$\rho(t) = C_1 + C_2 = 0 \quad (t = 0). \tag{3.75}$$

Согласно условию задачи скорость шарика в начальный момент равна v_0. С другой стороны, как это следует из выражения (3.13), единственной отличной от нуля составляющей скорости в начальный момент времени является $v_\rho = \dot{\rho}$, которая, как легко видеть из (3.74), равна:

$$\dot{\rho} = C_1\omega e^{\omega t} - C_2\omega e^{-\omega t}. \tag{3.76}$$

Подставим в это выражение $t = 0$ и приравняем его v_0. В результате получим второе уравнение относительно констант C_1 и C_2:

$$\dot{\rho}(t) = C_1\omega - C_2\omega = v_0 \quad (t = 0). \tag{3.77}$$

Решение системы уравнений (3.75) и (3.77) имеет вид:

$$C_1 = \frac{v_0}{2\omega}, \quad C_2 = -\frac{v_0}{2\omega}. \tag{3.78}$$

Совместное использование соотношений (3.74) и (3.78) приводит к искомой зависимости координаты ρ от времени:

$$\rho\left(t\right) = \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sh}\omega t. \tag{3.79}$$

Уравнения (3.69) и (3.70) до сих пор оставались в стороне. Однако именно они дают возможность найти составляющие силы, действующей со стороны трубки на шарик. Подставим найденное решение (3.79) в левую часть уравнения (3.69). После простых вычислений получим величину силы, действующей в направлении базисного вектора $\boldsymbol{e}_\varphi$ (т. е. в плоскости xOy по нормали к трубке):

$$F_\varphi = 2m\omega v_0 \operatorname{sh}\omega t, \tag{3.80}$$

а из уравнения (3.70) найдём, что $N = mg$.

Пример № 5

Шарик движется без трения по спиральному желобу, ось которого расположена вертикально. Первоначально покоящийся шарик находился на высоте H, шаг и радиус спирали равны соответственно h и R. Найти уравнения движения шарика, зависимости линейной скорости и линейного ускорения от времени, составляющие силы, действующей со стороны желоба на шарик (т. е. в данном случае реакцию опоры).

Решение

В этом примере при движении шарика изменяются координаты φ и z, а координата ρ остаётся неизменной, т. е.:

$$\rho = R, \quad \dot{\varphi} = \omega = \omega(t), \quad z = z(t). \tag{3.81}$$

Предлагаемый пример усложнён по сравнению с ранее рассмотренными в том отношении, что:

1) две координаты φ и z являются функциями времени;

2) три составляющих $\{N_\rho, N_\varphi, N_z\}$ вектора силы реакции опоры $\boldsymbol{N}$ являются неизвестными величинами. В принятых обозначениях для $\boldsymbol{N}$ имеем разложение по базисным векторам $\{\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z\}$ следующего вида:

$$\boldsymbol{N} = N_\rho \boldsymbol{e}_\rho + N_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + N_z \boldsymbol{e}_z. \tag{3.82}$$

Кроме реакции опоры на шарик действует сила тяжести $\boldsymbol{F}_T$:

$$\boldsymbol{F}_T = mg\boldsymbol{e}_z. \tag{3.83}$$

Как и ранее, последовательность действий решения задачи сводится к подстановке данных строки (3.81) и проекций векторов сил $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{F}_T$ в систему уравнений (3.42)–(3.44).

В результате получим уравнения движения (конечно же $\dot{\rho}$ и $\ddot{\rho}$ равны нулю):

$$m(-R\dot{\varphi}^2) = N_\rho, \tag{3.84}$$

$$mR\ddot{\varphi} = N_\varphi, \tag{3.85}$$

$$m\ddot{z} = N_z - mg. \tag{3.86}$$

Эта система уравнений не является замкнутой — в систему трёх уравнений входит пять неизвестных функций: $\{\varphi, z, N_\rho, N_\varphi, N_z\}$. Выведем два недостающих уравнения. Во-первых, учтём так называемые кинематические связи. Действительно, в нашем случае имеет место линейная связь между координатами z и φ:

$$z = H - \frac{h}{2\pi}\varphi, \tag{3.87}$$

в которой учтено, что за один оборот шарик опускается вниз на величину шага спирали h, а φ получает приращение 2π, а также тот факт, что в начальный момент шарик находился на высоте H и координата $\varphi = 0$.

Во-вторых, реакция опоры $\boldsymbol{N}$ направлена по нормали к траектории движения, т. е. перпендикулярно к вектору скорости $\boldsymbol{v}$ (напомним, вектор скорости направлен по касательной к траектории движения). В таком случае скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.88}$$

Что касается выражения для вектора скорости, то оно следует из общей формулы (1.12) как результат подстановок $\rho = R$ и $\dot{\rho} = 0$:

$$\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{e}_\rho + R\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z. \tag{3.89}$$

Распишем скалярное произведение (3.88) через компоненты векторов $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{v}$, определённых выражениями (3.82) и (3.89):

$$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{v}) = R\dot{\varphi}N_\varphi + \dot{z}N_z = 0. \tag{3.90}$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения соберём вместе полученные уравнения (3.84)–(3.87), (3.90), составляющие интересующую нас замкнутую систему уравнений движения тела (тем самым ответим на первый вопрос примера) относительно неизвестных функций $\{\varphi, z, N_\rho, N_\varphi, N_z\}$:

$$m(-R\dot{\varphi}^2) = N_\rho, \tag{3.91}$$

$$mR\ddot{\varphi} = N_\varphi, \tag{3.92}$$

$$m\ddot{z} = N_z - mg, \tag{3.93}$$

$$z = H - \frac{h}{2\pi}\varphi, \tag{3.94}$$

$$R\dot{\varphi}N_\varphi + \dot{z}N_z = 0. \tag{3.95}$$

Перейдём к вопросам о зависимости скорости и ускорения от времени. Как будет видно, решение этой системы уравнений не вызывает затруднений. Для начала, например, обратимся к уравнению (3.94) и подставим значение его правой части вместо z в уравнении (3.93):

$$-\frac{mh}{2\pi}\ddot{\varphi} = N_z - mg. \tag{3.96}$$

Уравнение (3.95) разрешаем относительно N_z, что даёт:

$$N_z = -\frac{R\dot{\varphi}}{\dot{z}}N_\varphi. \tag{3.97}$$

И принимая во внимание, что согласно (3.94) $\dot{z} = -\frac{h}{2\pi}\dot{\varphi}$, преобразуем (3.97) к виду:

$$N_z = \frac{2\pi R}{h}N_\varphi. \tag{3.98}$$

Воспользуемся выражением (3.92) для N_φ, которое совместно с (3.98) приводит к соотношению:

$$N_z = \frac{2\pi mR^2}{h}\ddot{\varphi}. \tag{3.99}$$

Наконец, заменяя N_z в уравнении (3.96) его значением (3.99) и сокращая на m, придём к простому уравнению относительно угловой переменной φ:

$$\ddot{\varphi} = g\frac{2\pi}{h}\frac{1}{1+\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2}. \qquad (3.100)$$

Из этого выражения делаем вывод о том, что угловое ускорение $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ не зависит от времени. Интегрируя по времени (3.100), найдём зависимость угловой скорости $\omega = \dot{\varphi}$ от времени:

$$\omega = \dot{\varphi} = g\frac{2\pi}{h}\frac{1}{1+\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2}t + C, \qquad (3.101)$$

которая, как видно из приведённого выражения, является линейной. Постоянную интегрирования C определим из данных задачи, согласно которым шарик при $t = 0$ находился в покое и, следовательно, $\omega = 0$. Подставляя эти значения t и ω в (3.101), найдём, что $C = 0$. Итак, окончательно, зависимость угловой скорости вращения от времени имеет вид:

$$\omega = \dot{\varphi} = g\frac{2\pi}{h}\frac{1}{1+\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2}t. \qquad (3.102)$$

Чтобы найти зависимость координаты φ от времени, достаточно проинтегрировать по переменной t выражение (3.102), что при нулевых начальных условиях, накладываемых на функцию φ, позволяет записать ответ в форме:

$$\varphi = g\frac{\pi}{h}\frac{1}{1+\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2}t^2. \qquad (3.103)$$

Как следствие формул (3.94) и (3.103) устанавливается зависимость координаты z от времени:

$$z = H - \frac{g}{2}\frac{1}{1+\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2}t^2. \tag{3.104}$$

На основе полученных решений, используя соотношения (3.91), (3.92) и (3.99), легко определить составляющие вектора реакции опоры. Действительно, для вычисления компоненты силы N_ρ подставим в (3.91) выражение (3.102), записав последовательность равенств:

$$N_\rho = m\left(-R\dot{\varphi}^2\right) = -m\frac{g^2}{R}\frac{\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2}{\left[1+\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2\right]^2}t^2. \tag{3.105}$$

Знак минус в этом выражении означает, что составляющая N_ρ направлена по радиусу к оси вращения (центростремительная сила) и с течением времени возрастает пропорционально квадрату времени.

Составляющую N_φ находим из выражения (3.92) и (3.100), имея цепочку равенств:

$$N_\varphi = mR\ddot{\varphi} = mg\frac{2\pi R}{h}\frac{1}{1+\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2}, \tag{3.106}$$

из чего делаем вывод о независимости этой составляющей от времени, или, что то же самое, от координат положения тела.

Наконец, вычислим значение N_z. Как следствие подстановки (3.100) в (3.99) получим:

$$N_z = \frac{2\pi mR^2}{h}\ddot{\varphi} = mg\frac{\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2}{\left[1+\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2\right]^2}, \tag{3.107}$$

в которой N_z, как и N_φ, не зависит от координат положения тела.

Вектор скорости определим из (3.89). Для этого подставим значение $\dot{\varphi}$ из выражения (3.101) и результат вычисления производной функции z из (3.104):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= 0\boldsymbol{e}_\rho + R\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z = \\ &= 0\boldsymbol{e}_\rho + g\frac{2\pi R}{h}\frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}t\boldsymbol{e}_\varphi - g\frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}t\boldsymbol{e}_z. \quad (3.108)\end{aligned}$$

Из (3.108) приходим к выводу, что имеются две отличных от нуля составляющих вектора скорости в базисе $\{\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z\}$, нарастающих во времени по линейному закону.

Будет полезным рассмотреть вопрос — можно ли простыми вычислениями убедиться в правильности выражения (3.108)? Покажем, что это возможно, если воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии, на обсуждении которой подробно остановимся при изучении понятия криволинейного интеграла.

Пусть тело перемещается из начального состояния в конечное по некоторой траектории L.

Изменение кинетической энергии тела, при перемещении из начального состояния в конечное, равно сумме работ вдоль траектории L всех сил, действующих на тело.

На основании этой теоремы простыми рассуждениями рассчитывается **абсолютное** значение скорости. В нашем случае начальная кинетическая энергия равна нулю, так как в начальный момент тело покоилось. Следовательно, изменение кинетической энергии равно кинетической энергии T_f в конечном состоянии f:

$$T_f = \frac{mv_f^2}{2}, \quad (3.109)$$

где v_f — абсолютная величина скорости в этом состоянии. Далее находим работу сил, действующих на тело. Одна из них есть сила реакции опоры $\boldsymbol{N}$. Так как сила $\boldsymbol{N}$ ортогональна вектору перемещения, то элемент работы, равный скалярному произведению вектора силы и вектора перемещения, обращается в нуль. Отсюда работа силы реакции опоры вдоль всей траектории также равна нулю. Что касается работы второй силы, то, как известно, работа силы тяжести не зависит от формы кривой движения тела. В вертикальном направлении путь, пройденный телом, равен высоте спирали H. Работа сила тяжести A_{mg}, очевидно, равна:

$$A_{mg} = mgH. \tag{3.110}$$

Следуя теореме об изменении кинетической энергии, из выражений (3.109) и (3.110) получаем известное выражение для модуля скорости:

$$v_f = \sqrt{2gH}. \tag{3.111}$$

Проверим, что из выражения (3.108) следует результат (3.111). Обозначим через t_0 время, за которое тело, начав движение из точки спирали при $z = H$, достигает нижнего положения при $z = 0$. Подставляя значения $z = 0$ и $t = t_0$ в ранее найденную зависимость (3.104) координаты z от времени и решая полученное уравнение относительно t_0, получим:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}\left[1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2\right]}. \tag{3.112}$$

С другой стороны, абсолютное значение скорости v в любой момент времени t, как видно из (3.108), равно:

$$v = g\frac{t}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}}. \tag{3.113}$$

Если в (3.113) подставить $t = t_0$ из (3.112), то найдём модуль скорости v_f тела в конечном состоянии, значение которого равно $\sqrt{2gH}$ и совпадает с выражением (3.111).

Пример № 6

Составить систему уравнений в цилиндрических координатах $\{\rho, \varphi, z\}$, определяющих траекторию движения тела в плоскости $z = 0$ вокруг неподвижного центра притяжения, расположенного в начале координат. Предполагается, что сила, действующая на тело, имеет вид:

$$\boldsymbol{F} = -f(\rho)\boldsymbol{e}_\rho \tag{3.114}$$

и $f(\rho) > 0$, так как по условию задачи на тело действует сила притяжения.

Решение

В частном случае:

$$f(\rho) = \gamma \frac{mM}{\rho^2} \tag{3.115}$$

речь идёт об определении траектории движения тела, взаимодействующего с центром массы M, который, как доказывается в механике, с определённой точностью можно считать неподвижным при соблюдении условия $M >> m$ (например, движение спутника вокруг Земли).

Если положить, что:

$$f(\rho) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{\rho^2}, \tag{3.116}$$

где в числителе стоит произведение модулей зарядов противоположного знака, ε и ε_0 — диэлектрическая постоянная среды и электрическая постоянная соответственно, то придём к задаче определения траектории заряда q_1 в поле заряда q_2, когда масса последнего много больше массы заряда q_1.

Выписать требуемые уравнения не составит труда. Воспользуемся общими уравнениями (3.42)–(3.44) и, в соответствии с данными примера, конкретизируем вид уравнений движения.

Как и ранее, траектория определяется зависимостью координат положения тела $\{\rho, \varphi, z\}$ от времени. В отличие от предыдущих примеров теперь уже пара переменных $\{\rho, \varphi\}$ зависит от времени, а координата z задана и равна нулю. Следовательно, имеем:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = 0. \tag{3.117}$$

Для составляющих $\{F_\rho, F_\varphi, F_z\}$ силы $\boldsymbol{F}$, согласно (3.114), имеем:

$$F_\rho = -f(\rho), \quad F_\varphi = 0, \quad F_z = 0. \tag{3.118}$$

Подставим наши заготовки (3.117) и (3.118) в (3.42)–(3.44). Уравнение (3.44) обращается в тождество, поэтому выпишем уравнения для координат $\{\rho, \varphi\}$:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -f(\rho), \tag{3.119}$$

$$m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0. \tag{3.120}$$

Решение системы уравнений (3.119) и (3.120) относительно координат $\{\rho, \varphi\}$ при заданных начальных условиях определяет конкретный вид траектории движения тела. Степень сложности решения системы уравнений (3.119) и (3.120) определяется зависимостью силы от расстояния ρ. Для важной с прикладной точки зрения зависимости $f(\rho) \sim \frac{1}{\rho^2}$ удаётся найти общее решение обсуждаемой системы уравнений. Решение этой системы уравнений рассмотрим в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь же обратим внимание на частный случай, который описывается системой уравнений (3.119) и (3.120).

Если считать $\rho = R$ постоянной величиной и подставить в (3.119) и (3.120), то вернёмся к ситуации примера № 2, т. е. к движению по окружности с постоянной скоростью. Окружность соответствует предельной форме эллипса при стремлении эксцентриситета к нулю. Теперь естественно предположить, что существует решение и при других значениях эксцентриситета, то есть осуществляются траектории, которые, в зависимости от начального положения и скорости, имеют вид конических сечений (эллипс, парабола, гипербола). Вернёмся к обсуждению этого предложения в разделе обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.5. Уравнения движения частицы в сферической системе координат

Проиллюстрируем применение полученных в пункте 3.2 общих соотношений (3.30)–(3.32) в случае сферических координат $\{r, \theta, \varphi\}$. Подставим в (3.30)–(3.32) вместо переменных $\{q^1, q^2, q^3\}$ координаты $\{r, \theta, \varphi\}$, заменим векторы $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ на базисные векторы $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$, а для коэффициентов Ламе воспользуемся их выражениями (2.22). В результате простых вычислений придём к следующему виду производных базисных векторов по координатам:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi; \tag{3.121}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta \boldsymbol{e}_\varphi; \tag{3.122}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta \boldsymbol{e}_r - \cos\theta \boldsymbol{e}_\theta. \tag{3.123}$$

Последовательно подставляя выражения (3.121)–(3.123) в (3.27)–(3.29) находим значения производных базисных векторов по времени:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial t} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{3.124}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial t} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{3.125}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial t} = -\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta. \tag{3.126}$$

Теперь осталось подставить соотношения (3.124)–(3.126) в выражение для ускорения (3.26) и собрать коэффициенты при базисных векторах $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$. После требующих определённого внимания действий получаем разложение вектора ускорения в базисе сферической системы координат:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = &\left[\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - r\dot{\varphi}^2\left(\sin\theta\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r + \\ &+\left[\frac{d\left(r\dot{\theta}\right)}{dt} + \dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right]\boldsymbol{e}_\theta + \\ &+\left[\frac{d\left(r\dot{\varphi}\sin\theta\right)}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right]\boldsymbol{e}_\varphi.\end{aligned} \tag{3.127}$$

Не трудно проверить, что для коэффициентов при векторах $\boldsymbol{e}_\theta$ и $\boldsymbol{e}_\varphi$ в (3.127) имеют место равенства:

$$\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + \dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta, \tag{3.128}$$

$$\frac{d\left(r\dot{\varphi}\sin\theta\right)}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d\left(r^2\dot{\varphi}\left(\sin\theta\right)^2\right)}{dt}. \tag{3.129}$$

Введём в выражение для ускорения (3.127) соотношения (3.128) и (3.129). Это позволит записать вектор ускорения в более компактном виде:

$$\boldsymbol{a} = \left[\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - r\dot{\varphi}^2 \left(\sin\theta\right)^2 \right] \boldsymbol{e}_r + \\ + \left[\frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta \right] \boldsymbol{e}_\theta + \\ + \left[\frac{1}{r\sin\theta} \frac{d\left(r^2\dot{\varphi}\left(\sin\theta\right)^2 \right)}{dt} \right] \boldsymbol{e}_\varphi. \qquad (3.130)$$

Чтобы получить уравнения движения в сферических координатах, достаточно подставить (3.130) в выражение второго закона Ньютона (3.24) и приравнять составляющие в левой части равенства проекциям $\{F_r, F_\theta, F_\varphi\}$ равнодействующей силы $\boldsymbol{F}$, имея в виду, что:

$$\boldsymbol{F} = F_r \boldsymbol{e}_r + F_\theta \boldsymbol{e}_\theta + F_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi. \qquad (3.131)$$

В результате этих действий определится вид динамических уравнений движения тела в сферических координатах:

$$m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - r\dot{\varphi}^2(\sin\theta)^2) = F_r, \qquad (3.132)$$

$$m\left[\frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta \right] = F_\theta, \qquad (3.133)$$

$$m\left[\frac{1}{r\sin\theta} \frac{d\left(r^2\dot{\varphi}\left(\sin\theta\right)^2 \right)}{dt} \right] = F_\varphi. \qquad (3.134)$$

Это весьма сложная система уравнений, решение которой для частных и практически важных случаев является примером задач аналитической механики. В пособии ограничимся простейшими вариантами анализа рассматриваемой системы уравнений.

Поставим следующую задачу: вывести уравнение движения математического маятника в вертикальной плоскости из системы уравнений (3.132)–(3.134) в постоянном гравитационном поле, полагая длину нити подвеса равной l.

Движение маятника является частным случаем движений, описываемых уравнениями (3.132)–(3.134). Это следует из того, что в нашем варианте движения из трёх в общем случае неизвестных функций r, θ, φ требуется найти лишь уравнение для угла отклонения $\alpha = \pi - \theta$ (рис. 8).

Относительно двух других функций из условия задачи известно, что $r = l$, а угловую переменную φ можно положить равной, например, нулю. Последнее означает, что движение происходит в вертикальной плоскости zOx. Что касается правых частей уравнений, то, как видно из рисунка 8 проекции F_r, F_θ, F_φ равнодействующей сил натяжения нити T и силы тяжести легко определяются и соответственно равны:

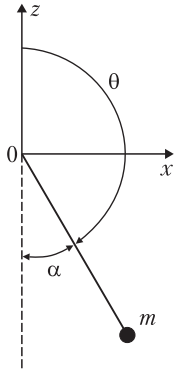

Рис. 8. Обозначения к выводу уравнения движения математического маятника в плоскости zOx

$$F_r = mg\cos\alpha - T, \tag{3.135}$$

$$F_\theta = mg\sin\alpha, \tag{3.136}$$

$$F_\varphi = 0. \tag{3.137}$$

Теперь осталось подставить полученные выражения F_r, F_θ, F_φ, а также значения $\theta = \pi - \alpha$, $r = l$, $\varphi = 0$ в систему (3.132)–(3.134). В результате получим существенно более простые уравнения относительно угла отклонения α и натяжения нити T:

$$-m\dot{\alpha}^2 l = mg\cos\alpha - T, \tag{3.138}$$

$$-l\ddot{\alpha} = g\sin\alpha, \tag{3.139}$$

при этом третье уравнение (3.137) обращается в тождество. Уравнение (3.139) не зависит от первого уравнения и описывает изменение угла с течением времени. Это уравнение нелинейное и его рассмотрение требует специального исследования. В курсе общей физики обсуждается простой вариант так называемых малых колебаний с использованием приближения $\sin\alpha \sim \alpha$. В рамках отмеченного приближения уравнение линеаризуется и принимает знакомый из школьной программы вид:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0, \tag{3.140}$$

из которого следует, что угловая частота определяется формулой:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{3.141}$$

Что касается уравнения (3.138), то оно, при известной зависимости угла отклонения от времени, служит для определения величины силы натяжения, которая, в свою очередь, находится по формуле, следующей из (3.138):

$$T = mg\cos\alpha + m\dot{\alpha}^2 l. \tag{3.142}$$

3.6. Динамика: уравнения Лагранжа в обобщённых координатах

Отличительной особенностью аналитического исследования задач механики является применение при формулировке уравнений движения механических систем обобщённых координат. *Обобщёнными координатами* механической системы называются некоторые целесообразно выбранные **независимые** переменные, определяющие положение системы в пространстве. Такими координатами могут быть, в частности, криволинейные координаты: полярные на плоскости, цилиндрические, сферические и другие.

Заметим, что переход от описания движения в прямоугольных декартовых координатах к обобщённым координатам может не только упростить решение задачи, но и оказаться необходимым в случаях, когда на исследуемую механическую систему наложены связи. С такой непростой ситуацией можно столкнуться даже в случае движения одной частицы, если она вынуждена двигаться по заданной траектории (например, по спирали) или некоторой поверхности (например, по параболоиду вращения).

Ранее, в пунктах 3.2–3.5, на основе второго закона Ньютона уже использовали криволинейные (обобщённые) координаты и определяли вид уравнений движения в цилиндрических и сферических координатах. Там же отмечалось, что технические трудности вывода уравнений движения сосредоточены в задаче отыскания производных базисных векторов по координатам и времени (формулы (3.26)–(3.32)).

Лагранж дал иную, в сравнении со вторым законом Ньютона, изящную эквивалентную этому закону формулировку, выраженную в терминах кинетической энергии T составляющих систему частиц и исходившего из сформулированного им принципа наименьшего действия. Уравнения движения механической натуральной (голономной) системы с n степенями свободы, предложенные Лагранжем, имеют вид (приводим без доказательства):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial u^i}=Q_i \quad (i = 1, ..., n), \tag{3.143}$$

где t — время, u^1, u^2, ..., u^n — обобщённые координаты, определяющие положение системы в пространстве, Q_i — обобщённые силы индекса i, выражающиеся для консервативных силовых полей через потенциальную энергию П известным соотношением:

$$Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial u^i} \quad (i = 1, ..., n). \tag{3.144}$$

Как будет видно из нижеприведённых примеров, кинетическая энергия является функцией не только обобщённых

скоростей $\dot{u}^i$, но и обобщённых координат u^i, что, собственно, и предполагается в (3.143).

Подчеркнём, что число уравнений вида (3.143) равно числу независимых обобщённых координат. Заметим также, что обобщённые координаты могут иметь разную размерность. В силу этого обстоятельства размерности обобщённых сил, как это следует из определения (3.144), вообще говоря, будут различными.

Оставляя в стороне огромное значение лагранжева подхода не только в механике, но и в других разделах физики, стоит отметить, что он лишён вышеупомянутых технических неудобств вычисления производных базисных векторов по координатам. Это следует из того, что уравнения (3.142) и (3.143) формулируются в понятиях кинетической и потенциальной энергий, которые являются скалярными величинами и не требуют введения базисных векторов.

Уравнения Лагранжа (3.142) определяют порядок действий, который следует осуществить для составления уравнений движения механической системы в криволинейных координатах, т. е. дифференциальных уравнений относительно обобщённых координат u^i при заданной потенциальной энергии взаимодействия. Как видно из структуры уравнений (3.142), следует найти частные производные от кинетической энергии по каждой обобщённой скорости $\dot{u}^i$, что потребует знания зависимости кинетической энергии от этих переменных. Нахождение указанной зависимости в конкретных задачах не представляет принципиальных сложностей. Так, в случае движения одной частицы вид кинетической энергии в произвольных ортогональных координатах, которые в этом случае играют роль обобщённых координат, легко устанавливается на основе выражений (3.11) и (3.17) заменой обозначений q^i на u^i.

В качестве иллюстрации к использованию уравнений Лагранжа для вывода уравнений движения частицы в криволинейных координатах рассмотрим несколько примеров, включающих ранее рассмотренные варианты уравнений движения в цилиндрических и сферических координатах, а также случай движения частицы по заданной поверхности.

Вывод уравнений движения частицы в цилиндрической системе координат

В интересующем нас случае роль обобщённых координат u^1, u^2, u^3 и обобщённых скоростей $\dot{u}^1$, $\dot{u}^2$, $\dot{u}^3$ играют цилиндрические координаты ρ, φ, z и $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{z}$ соответственно, а выражение для кинетической энергии, как функции этих переменных, было найдено ранее и, согласно (3.18), имеет вид:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\varphi}\right)^2 + \dot{z}^2\right). \qquad (3.145)$$

Следуя ранее отмеченному порядку вычислений и имея в виду выражение (3.145), находим частные производные по $\dot{u}^1 = \dot{\rho}$ и $u^1 = \rho$ от кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^1} \to \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \qquad (3.146)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^1} \to \frac{\partial T}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2. \qquad (3.147)$$

Далее, снова следуя порядку действий, задаваемых уравнением (3.143), находим производную по времени от выражения (3.146):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^1}\right) \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{\rho}\right) = m\ddot{\rho}. \qquad (3.148)$$

Подставляя теперь (3.147) и (3.148) в (3.143), получим первое из уравнений движения:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = Q_\rho, \qquad (3.149)$$

где введено обозначение:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial u^1}, \quad Q_\rho = -\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}. \qquad (3.150)$$

Сравнение выражения (3.149) с выражением (3.42), полученным другим способом, показывает, что с точностью до обозначений в правых частях уравнения совпадают, и:

$$Q_\rho = F_\rho. \tag{3.151}$$

Получим далее второе уравнение. Имея ввиду $\dot{u}^2 = \dot{\varphi}$ и $u^2 = \varphi$, находим, что:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^2} \to \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}, \tag{3.152}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^2} \to \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \tag{3.153}$$

Вычисление производной по времени от выражения (3.152) приводит к следующему результату:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\varphi}\right) = m\rho\left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right). \tag{3.154}$$

После подстановки этого выражения совместно с результатом (3.153) в (3.143) и деления на ρ получим второе уравнение движения частицы следующего вида:

$$m\left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right) = \frac{1}{\rho}Q_\varphi, \tag{3.155}$$

где Q_φ — обобщённая сила, соответствующая переменной φ и определённая равенством:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \tag{3.156}$$

Левые части уравнений (3.155) и (3.43) совпадают, а из сравнения правых частей следует, что проекция силы F_φ на

направление базисного вектора $\boldsymbol{e}_\varphi$ связана с обобщённой силой Q_φ соотношением:

$$F_\varphi = \frac{1}{\rho} Q_\varphi. \tag{3.157}$$

Наконец, полагая $\dot{u}^3 = \dot{z}$ и $u^3 = z$, находим частные производные по соответствующим переменным от выражения кинетической энергии (3.145):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^3} \to \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \tag{3.158}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^3} \to \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{3.159}$$

и производную по времени от обеих частей (3.158):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\right) = m\ddot{z}. \tag{3.160}$$

Третье уравнение получим после подстановки равенств (3.159) и (3.160) в (3.143):

$$m\ddot{z} = Q_z, \tag{3.161}$$

где обобщённая сила Q_z равна:

$$Q_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \tag{3.162}$$

Уравнение движения (3.159) совпадает с ранее полученным уравнением (3.44), при этом:

$$Q_z = F_z. \tag{3.163}$$

Обсудим формулы (3.151), (3.157) и (3.163), определяющие функциональные зависимости между физическими составляющими $\{F_\rho, F_\varphi, F_z\}$ вектора силы $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = F_\rho \boldsymbol{e}_\rho + F_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + F_z \boldsymbol{e}_z \tag{3.164}$$

и обобщёнными силами Q_i с индексами $i = \rho, \varphi, z$.

В потенциальном поле вектор силы $\boldsymbol{F}$ выражается через потенциальную энергию П операцией градиента:

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} \Pi. \tag{3.165}$$

Воспользуемся представлением градиента в цилиндрических координатах и перепишем равенство (3.165) в виде:

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} \Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi - \frac{\partial \Pi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{3.166}$$

Приведённое выражение есть разложение вектора силы по ортонормированному базису, а потому коэффициенты разложения в (3.166) являются физическими составляющими вектора $\boldsymbol{F}$, и, сопоставляя равенства (3.164) и (3.166), приходим к выводу, что:

$$F_\rho = -\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}, \qquad F_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \qquad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \tag{3.167}$$

С другой стороны, обобщённые силы определены как частные производные по соответствующим цилиндрическим координатам (3.150), (3.156) и (3.162), а именно:

$$Q_\rho = -\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}, \qquad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \qquad Q_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \tag{3.168}$$

Заменяя частные производные в (3.167) их значениями (3.168), установим отношения между наборами составляющих $\{F_\rho, F_\varphi, F_z\}$ и обобщёнными силами $\{Q_\rho, Q_\varphi, Q_z\}$:

$$F_\rho = Q_\rho, \qquad F_\varphi = \frac{1}{\rho}Q_\varphi, \qquad F_z = Q_z. \tag{3.169}$$

которые тождественны ранее установленным формулам (3.151), (3.157) и (3.163).

Наконец, соотношения (3.169) являются следствием общих соотношений (1.49) между ковариантными и физическими составляющими вектора. Действительно, ранее было показано, что частные производные (1.60) являются ковариантными составляющими. Следовательно, и набор частных производных Q_ρ, Q_φ, Q_z из (3.168) образует ковариантные компоненты, связи которых с физическими составляющими определяются выражениями (1.49). Заменяя в этих формулах A_1, A_2, A_3 на Q_ρ, Q_φ, Q_z и подставляя значения коэффициентов Ламе цилиндрических координат, получим тот же результат (3.169).

Вывод уравнений движения частицы в сферической системе координат

В данном случае роль обобщённых координат u^1, u^2, u^3 и обобщённых скоростей $\dot{u}^1$, $\dot{u}^2$, $\dot{u}^3$ играют сферические координаты r, θ, φ и $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ соответственно. Выражение для кинетической энергии, как функции этих переменных, согласно (3.23), имеет вид:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + \left(r\sin\theta\dot{\varphi}\right)^2\right). \qquad (3.170)$$

Следуя тому же порядку вычислений, что и в цилиндрических координатах, имея в виду выражение (3.170), находим частные производные по $\dot{u}^1 = \dot{r}$ и $u^1 = r$ кинетической энергии T:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^1} \to \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad (3.171)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^1} \to \frac{\partial T}{\partial r} = m\left(r\dot{\theta}^2 + r\left(\sin\theta\dot{\varphi}\right)^2\right). \qquad (3.172)$$

а затем находим производную по времени выражения (3.171):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^1}\right) \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right) = m\ddot{r}. \qquad (3.173)$$

Подставляя теперь (3.172) и (3.173) в (3.143), получим первое из уравнений движения:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r(\sin\theta\,\dot{\varphi})^2) = Q_r, \qquad (3.174)$$

где введено обозначение:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial u^1} \;\to\; Q_r = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}. \qquad (3.175)$$

Сравнение выражения (3.174) с выражением (3.132), полученным другим способом, показывает, что с точностью до обозначений в правых частях уравнения совпадают, и:

$$Q_r = F_r. \qquad (3.176)$$

Далее получим второе уравнение. Полагая $\dot{u}^2 = \dot{\theta}$ и $u^2 = \theta$, находим, что:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^2} \to \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad (3.177)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^2} \to \frac{\partial T}{\partial \theta} = m\sin\theta\cos\theta\left(r\dot{\varphi}\right)^2. \qquad (3.178)$$

Вычисление производной по времени выражения (3.177) приводит к следующему результату:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right). \qquad (3.179)$$

После подстановки выражений (3.178) и (3.179) в (3.143) и деления на r получим второе уравнение движения частицы следующего вида:

$$m\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)=\frac{1}{r}Q_\theta, \qquad (3.180)$$

где Q_θ — обобщённая сила, соответствующая переменной θ и определённая равенством:

$$Q_\theta=-\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}. \qquad (3.181)$$

Левые части уравнений (3.180) и (3.133) совпадают, а из сравнения правых частей следует, что проекция силы F_θ на направление базисного вектора $\boldsymbol{e}_\theta$ связана с обобщённой силой Q_θ соотношением:

$$F_\theta=\frac{1}{r}Q_\theta. \qquad (3.182)$$

Наконец, полагая $\dot{u}^3=\dot{\varphi}$ и $u^3=\varphi$, находим частные производные по соответствующим переменным от кинетической энергии (3.170):

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{u}^3}\to\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=m\dot{\varphi}\left(r\sin\theta\right)^2, \qquad (3.183)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^3}\to\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0 \qquad (3.184)$$

и производную по времени от обеих частей (3.183):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)=\frac{d}{dt}\left(m\dot{\varphi}\left(r\sin\theta\right)^2\right)=m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\left(\sin\theta\right)^2\right). \qquad (3.185)$$

Третье уравнение получим после подстановки равенств (3.184) и (3.185) в (3.143):

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\left(\sin\theta\right)^2\right)=Q_\varphi, \qquad (3.186)$$

где по определению:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \tag{3.187}$$

Разделим обе части уравнения (3.186) на произведение $r \sin\theta$ и запишем его в виде:

$$m\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\left(\sin\theta\right)^2\right) = \frac{Q_\varphi}{r\sin\theta}, \tag{3.188}$$

из сравнения которого с выражением (3.134) устанавливаем равенство левых частей уравнений (3.188) и (3.134). Что касается правых частей этих уравнений, то для них должно иметь место равенство:

$$F_\varphi = \frac{Q_\varphi}{r\sin\theta}. \tag{3.189}$$

Обсудим формулы (3.176), (3.182) и (3.189), определяющие функциональные зависимости между физическими составляющими $\{F_r, F_\theta, F_\varphi\}$ вектора силы $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = F_r\boldsymbol{e}_r + F_\theta\boldsymbol{e}_\theta + F_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi \tag{3.190}$$

и обобщёнными силами Q_i с индексами $i = r, \theta, \varphi$ на основе следующих соображений. В потенциальном поле вектор силы $\boldsymbol{F}$ выражается через потенциальную энергию Π операцией градиента:

$$\boldsymbol{F} = -\text{grad}\,\Pi. \tag{3.191}$$

Воспользуемся представлением градиента в сферических координатах и перепишем равенство (3.191) в виде:

$$\boldsymbol{F} = \text{grad}\,\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{3.192}$$

Приведённое выражение есть разложение вектора силы по ортонормированному базису, а потому коэффициенты разложения в (3.192) являются физическими составляющими

вектора $\boldsymbol{F}$. Сопоставляя равенства (3.190) и (3.192), приходим к выводу, что:

$$F_r = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \quad F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \qquad (3.193)$$

С другой стороны, обобщённые силы определены как частные производные по соответствующим сферическим координатам (3.175), (3.181) и (3.187), а именно:

$$Q_r = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad Q_\theta = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \qquad (3.194)$$

Заменяя частные производные в (3.193) их значениями из (3.194), установим отношения между наборами физических составляющих $\{F_r, F_\theta, F_\varphi\}$ и обобщёнными силами $\{Q_r, Q_\theta, Q_\varphi\}$:

$$F_r = Q_r, \quad F_\theta = -\frac{1}{r}Q_\theta, \quad F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}Q_\varphi. \qquad (3.195)$$

которые тождественны ранее установленным формулам (3.176), (3.182) и (3.189).

Как и в случае с цилиндрическими координатами, результат (3.195) можно было предвидеть заранее. Действительно, он следует из общих соотношений (1.49), если учесть, что частные производные (3.194), согласно общей теории, являются ковариантными составляющими (1.60).

Движение частицы по поверхности

Пусть уравнения поверхности Σ, по которой вынуждена двигаться частица под действием результирующей силы $\boldsymbol{F}$, заданы в параметрической форме:

$$\Sigma: q^i = q^i(u^1, u^2) \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (3.196)$$

Здесь q^i, как и ранее, — криволинейные координаты (в частности, это могут быть декартовы координаты). Параметры u^1, u^2

служат примером обобщённых координат, определяющих положение частицы на поверхности Σ. В результирующую силу $\boldsymbol{F}$ включена также сила реакции опоры. По условию задачи поверхность является гладкой (трение отсутствует). В таком случае реакция опоры $\boldsymbol{N}$, действующая на частицу со стороны поверхности, нормальна к Σ и представляет собой воздействие, вынуждающее частицу оставаться на ней.

Рассмотрим теперь следующую конкретную задачу: *определить вид уравнений движения частицы массы m, вынужденной двигаться по гладкому параболоиду вращения в поле силы тяжести:*

$$z = \frac{1}{2a}\left(x^2 + y^2\right). \tag{3.197}$$

Величина a — заданный параметр, который будем считать положительным. Так как геометрия задачи обладает симметрией вращения относительно оси z, то естественно провести её анализ в цилиндрической системе координат. Используя соотношения:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{3.198}$$

определяющие связи между прямоугольными декартовыми и цилиндрическими координатами, и, подставляя их в (3.197), преобразуем выражение (3.198) к виду:

$$z = \frac{\rho^2}{2a}. \tag{3.199}$$

Введём теперь параметрические координаты поверхности, которые и будут выполнять роль обобщённых координат в уравнениях Лагранжа (3.143), положив $u^1 = \rho$, $u^2 = \varphi$. Уравнения (3.196) в нашем случае, т. е. уравнения параболоида в цилиндрических координатах в параметрическом виде определятся как:

$$\rho = u^1 = \rho, \quad \varphi = u^2 = \varphi, \quad z = \frac{\left(u^1\right)^2}{2a} = \frac{\rho^2}{2a}. \tag{3.200}$$

Выражение для кинетической энергии в цилиндрических координатах, как уже не раз отмечалось, имеет вид:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\varphi}\right)^2 + \dot{z}^2\right). \qquad (3.201)$$

Однако переменные ρ, φ, z в этом соотношении не являются независимыми переменными, что очевидно следует из параметрического задания параболоида (3.200). В силу этого тройка переменных ρ, φ, z не может служить обобщёнными координатами. Обобщёнными координатами являются, как уже отмечалось выше, лишь пара переменных ρ, φ, в которых и следует записать кинетическую энергию (3.201). Для этой цели воспользуемся последним из уравнений (3.200), из которого следует, что:

$$\dot{z}^2 = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho^2}{2a}\right)\right)^2 = \left(\frac{\rho\dot{\rho}}{a}\right)^2 = \frac{\rho^2\dot{\rho}^2}{a^2}, \qquad (3.202)$$

и подставим выражение (3.202) в (3.201). В итоге получим выражение кинетической энергии в обобщённых координатах ρ, φ:

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right) + \left(\rho\dot{\varphi}\right)^2\right], \qquad (3.203)$$

что позволит провести вычисления в левой части уравнений Лагранжа (3.143). Прежде чем приступить к этой части вычислений, определим зависимость потенциальной энергии от обобщённых координат ρ и φ. Потенциальная энергия гравитационного поля равна mgz и принимает, с учётом последнего соотношения (3.200), форму:

$$\Pi = \frac{mg\rho^2}{2a}, \qquad (3.204)$$

т. е. зависит от одной переменной ρ. Так как в нашем случае две обобщённые координаты, то, из уравнений Лагранжа (3.143),

после вычисления соответствующих производных кинетической (3.203) и потенциальной (3.204) энергий, получим два уравнения относительно функций $\rho(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\ddot{\rho}+\frac{\rho\dot{\rho}^2}{a^2}-\rho\dot{\varphi}^2=-\frac{g\rho}{a}, \tag{3.205}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right)=0, \tag{3.206}$$

которые, совместно с уравнением (3.199), дают описание движения частицы по поверхности в трёхмерном пространстве.

Уравнение (3.206) легко интегрируется, что даёт уравнение сохранения момента:

$$\rho^2\dot{\varphi} = h = \text{Const.}, \tag{3.207}$$

где h — постоянная интегрирования. На основе этого соотношения исключим $\dot{\varphi}$ из уравнения (3.205). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно одной функции $\rho(t)$:

$$\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\ddot{\rho}+\frac{\rho\dot{\rho}^2}{a^2}-\frac{h^2}{\rho^3}=-\frac{g\rho}{a}. \tag{3.208}$$

Решение уравнения (3.208) и определение реакции опоры $\boldsymbol{N}$, вынуждающей двигаться частицу по параболоиду, сопряжены со значительными трудностями вычислительного характера и анализ обсуждаемого уравнения проводится в специальной литературе по аналитической механике. Остановимся на частных случаях движения и на их основе сделаем некоторые полезные выводы.

Пусть частица движется по горизонтальной окружности $\rho = \text{Const.}$, расположенной на параболоиде. Так как ρ не зависит от времени, то производные, присутствующие в уравнении (3.208), обращаются в нуль, и приходим к условию:

$$h^2 = \frac{g\rho^4}{a}, \tag{3.209}$$

при котором такое движение возможно. Из уравнений (3.207) и (3.209) следует, что угловая скорость:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{a}} \tag{3.210}$$

не зависит от радиуса окружности.

Рассмотрим вариант движения, при котором угол φ остаётся постоянным. Уравнение (3.206) выполняется при этом условии тождественно, а уравнение (3.205) принимает форму:

$$\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\ddot{\rho} + \frac{\rho\dot{\rho}^2}{a^2} + \frac{g\rho}{a} = 0. \tag{3.211}$$

Положим, что частица находится на дне параболоида вращения и ей сообщено малое отклонение (так, что величину ρ можно считать малой). Оставляя в правой части (3.211) члены первого порядка малости по ρ, получим простое линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{\rho} + \frac{g\rho}{a} = 0, \tag{3.212}$$

общее решение которого:

$$\rho(t) = A\sin(\omega t + \delta) \tag{3.213}$$

указывает на колебательный характер движения с угловой частотой колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}. \tag{3.214}$$

В выражении (3.213) A и δ — постоянные и определяются по начальным условиям. Выясним, какой физический смысл

имеет величина a в знаменателе выражения (3.197). С этой целью вычислим радиус кривизны кривой, получающейся в результате нормального сечения параболоида вращения, проходящего через его вершину. В любом нормальном сечении уравнение обсуждаемой кривой имеет один и тот же вид:

$$z = \frac{\rho^2}{2a}. \tag{3.215}$$

Напомним, что радиус кривизны R плоской кривой, заданной в явной форме $y = f(x)$, находится по формуле:

$$R = \frac{\left(1 + y'^{\,2}_x\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|y''_{xx}\right|}. \tag{3.216}$$

В нашем случае:

$$y'_x \to z'_\rho = \frac{\rho}{a}, \qquad y''_{xx} \to z''_{\rho\rho} = \frac{1}{a}. \tag{3.217}$$

Остаётся подставить эти значения в выражение (3.216) и учесть, что нас интересует величина радиуса кривизны при $\rho = 0$ (вершина параболы). В результате найдём, что:

$$R = a. \tag{3.218}$$

Итак, знаменатель в формуле (3.214) имеет смысл радиуса кривизны кривой нормального сечения в вершине параболоида. Аналогично и в уравнении (3.140) длину нити можно интерпретировать как радиус кривизны траектории.

§ 4. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ И КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Дадим определения определённого интеграла и криволинейного интеграла второго рода, которые найдут своё применение уже в этом параграфе. Дальнейшее изучение физики также потребует использование понятий криволинейного интеграла первого рода, двойного, объёмного и поверхностных интегралов. Однако столь широкое множество типов интегралов не вызовет особых затруднений в понимании их определений. Алгоритм построения перечисленных интегралов строится по одной и той же схеме, в чём можно убедиться на примерах определённого и криволинейного интеграла второго рода.

4.1. Определённый интеграл. Свойства. Метод вычисления

Начнём с определения **определённого интеграла**. Объектом рассмотрения является **числовая (скалярная)** функция:

$$f(x), \text{ определённая на отрезке } [a, b],\ a < b. \qquad (0)$$

1. Разобьём отрезок $[a, b]$ упорядоченной последовательностью точек M_k, координаты которых x_k $(k = 1, ..., n)$ таковы, что $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$.

Введём обозначение длины k-го отрезка: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

2. На каждом отрезке выберем произвольно точку $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и обозначим значение функции в этой точке как $f(c_k)$.

3. Составим произведение значения функции в точке c_k на длину отрезка Δx_k:

$$f(c_k)\Delta x_k. \qquad (I)$$

4. Составим **интегральную** сумму S_n, т. е. сумму слагаемых вида (I) по всем значениям индекса k:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \quad \text{(II)}$$

5. Далее осуществим предельный переход в выражении для интегральной суммы (II) при стремлении к нулю максимальной длины частичных отрезков. Обозначим через δ максимальную длину отрезков разбиения: $\delta = \max \Delta x_k$.

Определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, обозначаемого выражением:

$$\int_a^b f(x)dx,$$

называется предел интегральной суммы S_n при $\delta \to 0$, если численное значение предела не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные интервалы, ни от способа выбора точек c_k. Математически определение записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} S_n = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \qquad (4.1)$$

Подчеркнём, что результатом вычисления определённого интеграла, в отличие от неопределённого интеграла, является число.

4.2. Криволинейный интеграл второго типа (рода). Свойства. Метод вычисления

Объектом рассмотрения теперь является **векторная функция** $\boldsymbol{a}(P)$ точки пространства P, для которой будем также использовать обозначение $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор положения точки P. Будем считать, что векторная функция $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, или, что тоже самое, **векторное поле**, заданы на некоторой кривой L

трёхмерного пространства, определяемой векторным уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, в котором параметр s изменяется в пределах $\alpha \leqslant s \leqslant \beta$. Пусть значению параметра $s = \alpha$ соответствует начальная точка кривой M_0, а значению $s = \beta$ конечная точка кривой M.

Строка записи (0) пункта 4.1 в рассматриваемом случае примет вид:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}), \text{ определённая на кривой } L\colon r = r(s),\ \alpha \leqslant s \leqslant \beta. \qquad (0^*)$$

1. Разобьём кривую L упорядоченной последовательностью точек $M_0, M_1, \ldots, M_n = M$ ($k = 1, \ldots, n$) в направлении от точки M_0 к точке M на частичные дуги $M_{k-1}M_k$ и рассмотрим элементарные векторы (в механике векторы перемещения) $\Delta\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_{k-1}$, где $\boldsymbol{r}_k$ — радиус-вектор положения точки M_k.

2. На каждой дуге $\overline{M_{k-1}M_k}$ выберем произвольно точку $c_k \in \overline{M_{k-1}M_k}$ и обозначим значение векторной функции в этой точке как $\boldsymbol{a}(c_k)$.

3. Составим скалярное произведение значения векторной функции в точке c_k на элементарный вектор (вектор перемещения) $\Delta\boldsymbol{r}_k$:

$$(\boldsymbol{a}(c_k), \Delta\boldsymbol{r}_k). \qquad (\mathrm{I}^*)$$

4. Составим **интегральную** сумму S_n, т. е. сумму слагаемых вида (I*) по всем значениям индекса k:

$$S_n = \left(\boldsymbol{a}\left(c_1\right), \Delta\boldsymbol{r}_1\right) + \left(\boldsymbol{a}\left(c_2\right), \Delta\boldsymbol{r}_2\right) + \ldots + \left(\boldsymbol{a}\left(c_n\right), \Delta\boldsymbol{r}_n\right) = \\ = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{a}\left(c_k\right), \Delta\boldsymbol{r}_k\right). \qquad (\mathrm{II}^*)$$

5. Далее найдём предел интегральной суммы (II*) при стремлении числа разбиения кривой n к бесконечности, так что **максимальная** длина частичных дуг стремится к нулю. Обозначим через δ максимальную длину частичных дуг разбиения кривой:

$$\delta = \max \left| \overline{M_{k-1}M_k} \right|.$$

Криволинейным интегралом второго рода от векторной функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ по кривой L, обозначаемый выражением:

$$\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}),, \qquad (4.1^*)$$

называется предел интегральной суммы S_n при $\delta \to 0$, если численное значение предела не зависит ни от способа разбиения кривой L на частичные дуги, ни от способа выбора точек c_k. Математически определение записывается так:

$$\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \lim_{\delta \to 0} S_n = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k-1}^{n} (\boldsymbol{a}(c_k), \Delta \boldsymbol{r}_k). \qquad (4.2)$$

Подчеркнём, что результатом вычисления криволинейного интеграла является число.

Наконец, схема построения криволинейного интеграла второго типа, как это следует из его определения, аналогична схеме построения определённого интеграла.

В большинстве случаев вычислить рассмотренные здесь интегралы, полагаясь на определение, не удаётся, поэтому ниже обсудим методы их вычисления. Однако понимание введённых определений необходимо для принятия правильного решения в отношении выбора того или иного типа интеграла при исследовании конкретных практических задач.

Другая форма записи криволинейного интеграла второго типа (рода)

В обозначении криволинейного интеграла второго рода в качестве подынтегрального выражения присутствует скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$. В прямоугольной декартовой системе координат входящие в него сомножители запишем в виде:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = a_1(x, y, z)\boldsymbol{i} + a_2(x, y, z)\boldsymbol{j} + a_3(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

$$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}.$$

Для скалярного произведения будем иметь:

$$(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = a_1(x, y, z)dx + a_2(x, y, z)dy + a_3(x, y, z)dz.$$

Для проекций векторного поля $\boldsymbol{a}$ введём общепринятые в математической литературе обозначения: $a_1 = P$, $a_2 = Q$, $a_3 = R$. В результате этой замены для скалярного произведения получим выражение:

$$(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

а обозначение криволинейного интеграла приобретает новую форму:

$$\int_L \big(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}\big) = \int_L P\big(x,y,z\big)dx + Q\big(x,y,z\big)dy + R\big(x,y,z\big)dz \quad (4.3)$$

или часто используемую сокращённую форму правой части:

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz. \quad (4.3^*)$$

Метод вычисления криволинейного интеграла второго рода

Пусть кривая L задана в параметрическом виде:

$$L: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), \\ z = z(s) \end{cases} \quad \alpha \le s \le \beta. \quad (4.4)$$

Вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению **определённого** интеграла согласно формуле:

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta \Big[P\big(x(s), y(s), z(s)\big)\dot{x}(s) + \\ + Q\big(x(s), y(s), z(s)\big)\dot{y}(s) + R\big(x(s), y(s), z(s)\big)\dot{z}(s) \Big] ds. \quad (4.5)$$

Правая часть этого выражения есть **определённый** интеграл, взятый в пределах изменения параметра s, указанных в (4.4), функции P, Q, R вычисляются в точках кривой и в силу этого становятся функциями одной переменной интегрирования s. Наконец, $\dot{x}(s)$, $\dot{y}(s)$, $\dot{z}(s)$ производные от заданных функций (4.4), определяющих кривую L. Поэтому формирование подынтегрального выражения определённого интеграла обычно не доставляет трудностей.

Поясним естественность существования формулы (4.5). Выпишем выражение, стоящее под знаком интеграла в левой части (4.5):

$$Pdx + Qdy + Rdz,$$

или, в более развёрнутом, виде:

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \qquad (4.6)$$

Согласно определению, это выражение следует вычислять в точках кривой. Последнее и означает, что x, y, z принимают значения $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$. Что касается присутствующих в (4.6) дифференциалов dx, dy, dz, то они вычисляются по формуле для дифференциала функции одной переменной, которую здесь воспроизведём, заменив обозначение $f'(x)$ на $\dot{f}(x)$:

$$df(x) = \dot{f}(x)dx.$$

В итоге получим:

$$dx = \dot{x}(s)ds, \quad dy = \dot{y}(s)ds, \quad dz = \dot{z}(s)ds. \qquad (4.7)$$

В результате вышеуказанных действий приведём выражение (4.6) к виду:

$$P(x(s), y(s), z(s))\dot{x}(s)ds + Q(x(s), y(s), z(s))\dot{y}(s)ds +$$
$$+ R(x(s), y(s), z(s))\dot{z}(s)ds,$$

очевидно, совпадающему с подынтегральным выражением определённого интеграла в (4.5).

4.3. Пример вычисления криволинейного интеграла второго рода

Вычислить работу силового поля:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 2xy\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k} \tag{4.8}$$

при перемещении материальной частицы вдоль сечения гиперболоида $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ плоскостью $y = x$ от точки $(a, a, 0)$ до точки $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$. Считать $a > 0$.

Решение

Элемент работы dA в физике определяется как скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения:

$$dA = (\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}). \tag{4.9}$$

Результат сложения элементов работы на всех участках перемещения точки играет роль интегральной суммы в определении криволинейного интеграла второго рода. Поэтому работа по перемещению материальной частицы из точки A в точку B по траектории L выражается криволинейным интегралом второго рода следующего вида:

$$A = \int_{L_{AB}} \left(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}\right). \tag{4.10}$$

По условию задачи траектория движения есть сечение гиперболоида плоскостью. Следовательно, координаты движущейся точки должны удовлетворять системе уравнений:

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2, \tag{4.11}$$

$$y = x.$$

Обозначая, как в (4.4), параметр через s, и полагая $x = s$, запишем уравнение кривой движения точки в параметрическом виде:

$$L_{AB}:\begin{array}{l} x = s \\ y = s \\ z = \sqrt{s^2 - a^2} \end{array}, \quad \alpha \le s \le a\sqrt{2}. \tag{4.12}$$

Выражение для z следует из первого уравнения (4.11), полагая в нём $y = x = s$.

Далее, на основании (4.8) и формулы скалярного произведения, имеем ($d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$):

$$(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = 2xydx + y^2dy - x^2dz. \tag{4.13}$$

В интеграле (4.10) скалярное произведение вычисляется в точках кривой интегрирования. Последнее означает, что в (4.13) следует подставить координаты кривой L_{AB} из её параметрического задания (4.12), что приводит к выражению:

$$\left(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}\right)\Big|_{L_{AB}} = \left(3s^2 - \frac{s^3}{\sqrt{s^2 - a^2}}\right)ds.$$

В результате подстановки этого выражения в (4.10) задача вычисления искомой работы сведётся к вычислению определённого интеграла:

$$A = \int_a^{a\sqrt{2}} \left(3s^2 - \frac{s^3}{\sqrt{s^2 - a^2}}\right)ds = \int_a^{a\sqrt{2}} 3s^2 ds - \int_a^{a\sqrt{2}} \frac{s^3}{\sqrt{s^2 - a^2}}ds.$$

Первый интеграл очевидно равен $(2\sqrt{2} - 1)a^3$. Введя новую переменную $u = s^2 - a^2$, приведём второй интеграл к легко интегрируемому виду:

$$\int_a^{a\sqrt{2}} \frac{s^3}{\sqrt{s^2 - a^2}}ds = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} \frac{u + a^2}{\sqrt{u}}du = \frac{4}{3}a^3.$$

Собирая вместе указанные значения интегралов, придём к конечному результату для искомой работы силового поля:

$$A = \left(2\sqrt{2} - \frac{7}{3} \right) a^3.$$

Замечание. Конечно, решить задачу можно было, непосредственно опираясь на формулу (4.5) сведения криволинейного интеграла второго рода к определённому, воспользовавшись параметризацией кривой (4.12).

§ 5. ДВОЙНОЙ И ТРОЙНОЙ (ОБЪЁМНЫЙ) ИНТЕГРАЛЫ

■ *Двойной интеграл* является обобщением определённого интеграла на случай функции двух переменных.

■ *Тройной интеграл* является обобщением определённого интеграла на случай функции трёх переменных.

Алгоритм построения как двойного, так и тройного (или объёмного) интегралов полностью повторяет шаги построения определённого интеграла и сводится к одному и тому же набору действий.

5.1. Двойной интеграл

Начнём с определения *двойного интеграла*.

1. Пусть в области D плоскости xOy определена функция $f(x, y)$. Разобьём область D на n элементарных областей D_i ($i = 1, 2, ..., n$), площади которых обозначим как ΔS_i, а диаметры областей D_i (наибольшее расстояние между точками области) — через d_i.

2. В каждой из областей D_i выберем произвольную точку M_i с координатами (x_i, y_i), а $f(x_i, y_i)$ — значение функции в точке M_i.

3. Умножим значение функции $f(x_i, y_i)$ в каждой точке M_i на площадь элементарной области ΔS_i:

$$f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

4. Составим сумму полученных произведений по всем элементам разбиения D_i:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i. \qquad (5.1)$$

Сумма (5.1) называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$ в области D.

5. Перейдём к пределу интегральной суммы (5.1) при таком стремлении числа разбиений n области D к бесконечности, что максимальный диаметр d_i стремится к нулю ($\max d_i \to 0$). Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области D на элементарные части, ни от выбора точек M_i в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается выражением:

$$\iint_D f(x,y)\,dS \quad \text{или} \quad \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Из вышеизложенного следует, что двойной интеграл определяется равенством:

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i, \qquad (5.2)$$

при этом D называют областью интегрирования, dS или ($dxdy$) — элементом площади, а саму функцию, если предел в указанном смысле существует, — интегрируемой.

5.2. Тройной (объёмный) интеграл

Перейдём теперь к определению *объёмного* (*тройного*) *интеграла*.

В этом случае вместо функции двух переменных, определённой в плоской области D, речь пойдёт о функции трёх переменных, определённой в некоторой области V трёхмерного пространства (в объёме V). Соответственно, этот объём разбивается сеткой поверхностей на элементарные объёмы, и в каждом из них выбирается точка, в которой берётся значение функции.

Определение *тройного интеграла*.

1. Пусть в области V пространства $Oxyz$ определена функция $f(x, y, z)$. Разобьём область (объём) V на n элементарных областей V_i (i =1, 2, ..., n), объёмы которых обозначим как ΔV_i, а диаметры областей V_i (наибольшее расстояние между точками области) — через d_i.

2. В каждой из областей V_i выберем произвольную точку M_i с координатами (x_i, y_i, z_i), а $f(x_i, y_i, z_i)$ — значение функции в точке M_i.

3. Умножим значение функции $f(x_i, y_i, z_i)$ в каждой точке M_i на объём элементарной области ΔV_i:

$$f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

4. Составим сумму полученных произведений по всем элементам разбиения V_i:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta V_i. \qquad (5.3)$$

Сумма (5.3) называется *интегральной суммой* функции $f(x, y, z)$ в области V.

5. Перейдём к пределу интегральной суммы (5.3) при таком стремлении числа разбиений n области V к бесконечности, что максимальный диаметр d_i стремится к нулю ($\max d_i \to 0$). Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области V на элементарные части, ни от выбора точек M_i в них, то он называется *тройным* (*объёмным*) *интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается выражением:

$$\iiint_V f\left(x, y, z\right)dV \quad \text{или} \quad \iiint_V f\left(x, y, z\right)dxdydz.$$

Из вышеизложенного следует, что тройной интеграл определяется равенством:

$$\iiint_V f\left(x, y, z\right)dV = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum\nolimits_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta V_i. \qquad (5.4)$$

5.3. Примеры на построение интегралов

Обсудим теперь прикладное значение введённых выше определений интегралов. При решении конкретной прикладной задачи весьма часто приходится решать вопросы:

а) имеем ли дело с интегралом;

б) если да, то с каким типом интеграла (определённым, двойным, объёмным);

в) наконец, определившись с типом интеграла, как его вычислить.

Последний вопрос относится к технике (методам) вычисления интегралов, чему уделим внимание позже, а сейчас займёмся двумя первыми.

Если, исходя из условия прикладной задачи, интуиция нам подсказывает необходимость разбиения прямого отрезка, или фигуры на плоскости, или объёма в пространстве на элементарные области, и последующего суммирования по элементам разбиения, то имеем дело с интегралом.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример № 1

Пусть дан *прямолинейный* неоднородный провод длины l с изменяющейся линейной плотностью $\tau = \tau(x)$, расположенный вдоль положительной оси x с началом в точке O. Требуется определить массу провода.

Решение

По условию задачи τ есть функция координаты точки провода, т. е. $\tau = \tau(x)$. Так как линейная плотность разная в разных точках, то не остаётся ничего другого, как разбить провод на достаточно малые отрезки Δx_i (элементы длины), в пределах которых плотность меняется незначительно. Тогда масса Δm_i элемента Δx_i определится произведением линейной плотности в некоторой промежуточной точке x_i, принадлежащей этому элементу, на длину Δx_i:

$$\Delta m_i \cong \tau\left(x_i\right)\Delta x_i.$$

Для определения всей массы следует сложить все Δm_i (т. е. составить интегральную сумму) и перейти к пределу. Стоит отметить, что все рассуждения полностью повторяют таковые в определении определённого интеграла, и заметить это можно уже на этапе необходимости разбиения отрезка $[0, l]$. Поэтому предложенная задача является задачей вычисления *определённого* интеграла от функции $\tau(x)$ по отрезку $[0, l]$. Следовательно:

$$m = \int_0^l \tau\left(x\right) dx. \tag{5.5}$$

Пример № 2

Пусть дана неоднородная плоская мембрана, занимающая область D в плоскости xOy, поверхностная плотность материала которой $\sigma = \sigma(x, y)$. Требуется определить массу мембраны.

Решение

По условию задачи σ есть функция координат точки мембраны. Так как поверхностная плотность материала разная в разных точках, то, как и в предыдущем примере, следует разбить область мембраны на элементарные области D_i (достаточно малых диаметров), в пределах которых поверхностная плотность меняется незначительно. Обозначив площадь элементарной области D_i как ΔS_i, массу этой области найдём по формуле:

$$\Delta m_i \cong \sigma\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i,$$

где x_i, y_i — координаты некоторой точки $M_i \in D_i$. Для определения массы мембраны следует сложить все Δm_i и перейти к пределу.

Все рассуждения полностью повторяют последовательность действий в определении двойного интеграла, поэтому предложенная задача является задачей вычисления *двойного*

интеграла от функции $\sigma(x, y)$ по области D, занимаемой мембраной. Следовательно:

$$m = \iint_D \sigma(x, y)\, dS. \tag{5.6}$$

Пример № 3

Пусть некоторое тело объёмной плотности $\rho(x, y, z)$ занимает объём V. Требуется найти массу тела.

Решение

По условию задачи объёмная плотность есть функция координат точки тела. Так как объёмная плотность материала разная в разных точках, то, как и в предыдущих примерах, следует разбить объём на элементарные объёмы V_i (области достаточно малых диаметров), в пределах которых объёмная плотность изменяется незначительно. Обозначив объём элементарного объёма V_i как ΔV_i, найдём его массу по формуле:

$$\Delta m_i \cong \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i, \tag{5.7}$$

где x_i, y_i, z_i — координаты точки $M_i \in V_i$. Для определения массы тела следует сложить все Δm_i и перейти к пределу.

Все рассуждения полностью следуют последовательности действий в определении тройного интеграла, поэтому предложенная задача является задачей вычисления *тройного* интеграла от функции $\rho(x, y, z)$ по объёму тела. Следовательно:

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dV. \tag{5.8}$$

Очевидно, что если функциям $\tau(x)$, $\sigma(x, y)$, $\rho(x, y, z)$ придать физический смысл линейной, поверхностной или объёмной плотности заряда, то результаты вычислений по формулам (5.5), (5.6) и (5.8) дают ответ на вопросы о значениях величин полного заряда линейного отрезка проводника, заряженной мембраны или тела соответственно.

Прежде чем переходить к обсуждению свойств и методов вычисления двойных и тройных интегралов, введём для них более краткие обозначения: для двойного интеграла будем использовать:

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \int_D f(x,y)\,dS = \int_D f(x,y)\,dxdy,$$

а для объёмного:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \int_V f(x,y,z)\,dV = \int_V f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Как будет видно из дальнейшего, двойные и тройные интегралы найдут применение при вычислении целого ряда физических величин, например, таких как статические моменты и координаты центра тяжести, моменты инерции плоских и объёмных фигур.

Пример № 4

Пусть некоторое тело объёмной плотности $\rho(x, y, z)$ занимает объём V. Требуется найти радиус-вектор положения центра масс твёрдого тела.

Решение

Согласно определению *центром масс системы* материальных (дискретных) точек называется точка C системы, радиус-вектор $\boldsymbol{r}_c$ которой определяется равенством:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{m}. \qquad (5.9)$$

В задаче предполагается непрерывное распределение плотности вещества по объёму тела. Покажем, что в этом случае для проекций радиус-вектора $\boldsymbol{r}_c$ справедливы формулы:

$$x_c = \frac{\int_V x\rho(x,y,z)dV}{\int_V \rho(x,y,z)dV}, \qquad y_c = \frac{\int_V y\rho(x,y,z)dV}{\int_V \rho(x,y,z)dV},$$

$$z_c = \frac{\int_V z\rho(x,y,z)dV}{\int_V \rho(x,y,z)dV}. \tag{5.10}$$

а для векторной формы записи:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho(x,y,z)dV}{\int_V \rho(x,y,z)dV} = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho(x,y,z)dV}{m}. \tag{5.11}$$

Разобьём объём тела на элементарные объёмы ΔV_i, масса Δm_i каждого из которых определяется по формуле (5.7). К построенной дискретной системе масс Δm_i применимо определение (5.9). При этом числитель и знаменатель выражения (5.9) запишутся как:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \rho(x_i, y_i, z_i)\boldsymbol{r}_i \Delta V_i, \tag{5.12}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{N} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i. \tag{5.13}$$

Каждая из построенных сумм является интегральной суммой в определении тройного интеграла. Соответствующие пределы этих сумм являются объёмными интегралами следующего вида:

$$\int_V \boldsymbol{r}\rho(x,y,z)dV \quad \text{и} \quad \int_V \rho(x,y,z)dV = m,$$

подстановка которых в (5.9) приводит к результату (5.11).

При необходимости записи выражения *кинетической* энергии непрерывно распределённых масс с плотностью $\rho(x, y, z)$ и занимающих объём V, разбиваем, как и в предыдущем случае, объём тела на элементарные объёмы ΔV_i, масса Δm_i каж-

дого из которых определяется по формуле (5.7). К каждой построенной дискретной массе Δm_i применим определение кинетической энергии точечной массы и просуммируем по всем элементам объёма. Тем самым придём к интегральной сумме:

$$\sum_{i=1}^{N} \rho\left(x_i, y_i, z_i\right) \frac{v^2\left(x_i, y_i, z_i\right)}{2} \Delta V_i, \qquad (5.14)$$

о которой идёт речь в определении объёмного интеграла. Предел построенной суммы и есть объёмный интеграл:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{N} \rho\left(x_i, y_i, z_i\right) \frac{v^2\left(x_i, y_i, z_i\right)}{2} \Delta V_i = \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV.$$

Здесь, для сокращения записи, опущены обозначения аргументов в функциях ρ и v, стоящих под интегралом. Интегральная сумма (5.14) по физическому смыслу является приближённым значением кинетической энергии. Предел интегральной суммы принимается в качестве точного её значения. Таким образом кинетическая энергия непрерывно распределённых масс определяется равенством:

$$T = \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV.$$

5.4 Свойства двойных и тройных интегралов

После того, как в конкретной задаче определились с типом интеграла, встаёт задача его вычисления (операция интегрирования функции или взятия интеграла). Вычисление интегралов производится на основе свойств интегралов и метода сведения двойных и тройных интегралов к последовательному вычислению определённых интегралов, поэтому этот метод называется методом сведения к повторным определённым интегралам.

Для целей данного курса нам достаточно познакомится лишь со следующими *свойствами* двойных и тройных интегралов (аналогичные свойствам определённого интеграла):

1. Постоянный множитель c можно выносить за знак интеграла:

$$\int_D cf\left(x,y\right)dS = c\int_D f\left(x,y\right)dS,$$

$$\int_V cf\left(x,y,z\right)dV = c\int_V f\left(x,y,z\right)dV.$$

2. Интегралы от суммы/разности функций равны сумме/разности интегралов от этих функций:

$$\int_D\left(f\left(x,y\right)\pm\varphi\left(x,y\right)\right)dS = \int_D f\left(x,y\right)dS \pm \int_D \varphi\left(x,y\right)dS,$$

$$\int_V\left(f\left(x,y,z\right)\pm\varphi\left(x,y,z\right)\right)dV = \int_V f\left(x,y,z\right)dV \pm \int_V \varphi\left(x,y,z\right)dV.$$

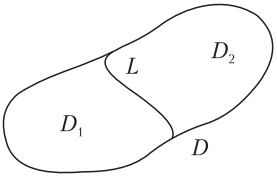

Рис. 9. Разбиение области D кривой L на две непересекающиеся части D_1 и D_2

3. Разделим область D кривой L на две непересекающиеся части D_1 и D_2, такие, что их объединение равно D (рис. 9). В таком случае справедливо равенство:

$$\int_D f\left(x,y\right)dS = \int_{D_1} f\left(x,y\right)dS + \int_{D_2} f\left(x,y\right)dS.$$

Аналогично, если разбить объём V на две непересекающиеся части V_1 и V_2 такие, что их объединение равно V, то имеет место равенство:

$$\int_V f\left(x,y,z\right)dV = \int_{V_1} f\left(x,y,z\right)dV + \int_{V_2} f\left(x,y,z\right)dV.$$

4. Из определения двойного интеграла следует, что:

$$\int_D dS = S,$$

так как $\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = S$.

Точно также из определения объёмного интеграла следует, что:

$$\int_V dV = V,$$

так как любая интегральная сумма имеет вид $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$ и численно равна объёму V.

5.5. Сведение двойных и тройных интегралов к повторным

Метод вычисления двойного интеграла

Метод вычисления двойного интеграла заключается в сведении двойного интеграла к повторному интегралу в декартовой системе координат.

Пусть область D имеет вид, показанный на рисунке 10, *а*. В обозначениях рисунка интересующая нас формула сведения двойного интеграла к повторному имеет вид:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy, \qquad (5.15)$$

так что внутренний интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ является подынтегральной функцией внешнего интеграла, берущегося по переменной x в пределах от a до b.

Обратим внимание на особенности области D, представленной на рисунке 10, *а*. Видно, что область D имеет вид криволинейной трапеции, ограниченной такими прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, что $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ справедливо для всех $a \leqslant x \leqslant b$. Описанная область называется

правильной в направлении оси y и обладает тем свойством, что любая прямая, параллельная оси y, пересекает границу области не более двух раз.

Если область интегрирования является правильной в направлении оси x и ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$ ($c < d$), то, в соответствии с обозначениями на рисунке 10, *б*, формула перехода от двойного интеграла к повторному выглядит следующим образом:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (5.15^*)$$

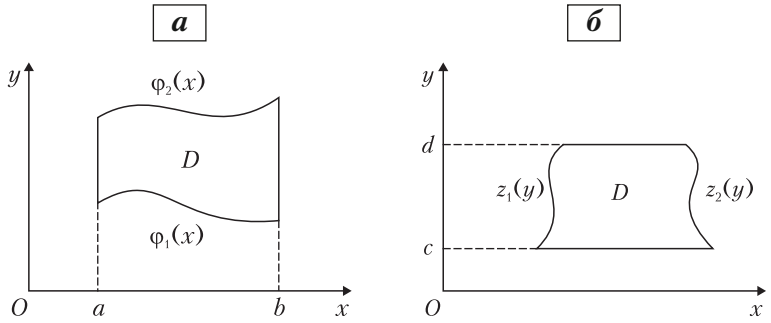

Рис. 10. Вид области D в интеграле: *а* — (5.15), *б* — (5.15*)

Замечание. Может оказаться, что область D не является правильной в обоих направлениях. В таком случае, основываясь на свойстве 3 двойного интеграла, следует разбить область интегрирования на части, правильные в одном из направлений.

Рассмотрим пример применения формулы (5.15).

Пример

Требуется найти массу пластинки, имеющей форму, изображённую на рисунке 11. Плотность материала пластинки постоянна и равна σ_0.

Решение

Как уже знаем, определение массы сводится к вычислению двойного интеграла (5.6), в котором подынтегральная функция равна постоянной σ_0 и может быть вынесена за знак интеграла.

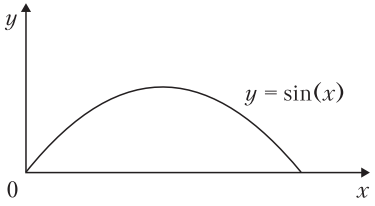

Рис. 11. Форма пластинки, имеющая смысл области интегрирования в выражении (5.16)

Итак:

$$m = \sigma_0 \iint_D dxdy = \sigma_0 \int_D dS = \sigma_0 dS, \qquad (5.16)$$

где воспользовались сокращённым обозначением двойного интеграла и свойством 4. Таким образом, задача свелась к определению площади пластины:

$$S = \iint_D dxdy.$$

Применяя формулу (5.15) к этому интегралу, учитывая обозначения рисунка 11, запишем:

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi} \sin x \; dx =$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2.$$

Следовательно:

$$m = 2\sigma_0.$$

Метод вычисления тройного интеграла

Метод вычисления тройного интеграла заключается в сведении тройного интеграла к повторному интегралу в декартовой системе координат.

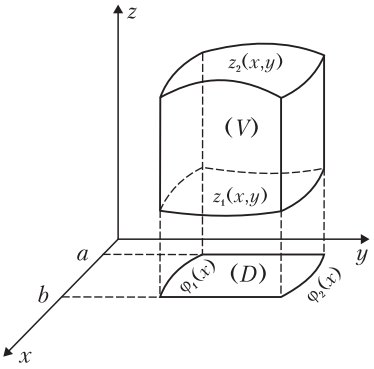

Рис. 12. Область (объём) интегрирования в интеграле (5.17)

Пусть для начала область интегрирования (объём) является правильной в направлении оси *z*. Это означает, что любая прямая, параллельная оси *z*, пересекает поверхность, ограничивающую объём не более, чем в двух точках. В обозначениях рисунка 12 формула перехода от тройного интеграла к поочерёдному вычислению трёх определённых интегралов (т. е. повторному интегралу) имеет вид:

$$\int_V f\left(x,y,z\right)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\left(x,y,z\right)dz. \quad (5.17)$$

Рассмотрим пример применения формулы (5.17).

Пример

Требуется найти массу тела, плотность которого $\rho = az$, а область, занимаемая телом, указана на рисунке 13.

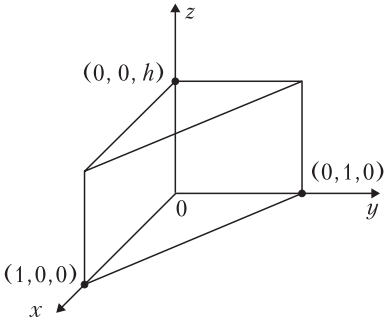

Рис. 13. Область (объём) интегрирования в интеграле (5.18)

Задача, согласно (5.8), сводится к вычислению тройного интеграла:

$$m = \int_V \alpha z dxdydz = \\ = \alpha \int_V z dxdydz. \quad (5.18)$$

На основании формулы (5.17) и обозначений на рисунке 13, запишем его в форме повторного интеграла:

$$\int_V z dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^h z dz.$$

Далее последовательно вычисляем интегралы как определённые:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^h z dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{2} \int_0^1 dx \left(1-x\right) =$$

$$= \frac{h^2}{2} \int_0^1 \left(1-x\right) dx = \frac{h^2}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{h^2}{4}.$$

Итак:

$$m = \alpha \int_V z dx dy dz = \alpha \frac{h^2}{4}.$$

5.6. Замена переменных в двойных и тройных интегралах

При вычислении двойных и объёмных интегралов, перед сведением их к повторным, часто предварительно используется переход от исходных декартовых координат к новым переменным, что в ряде случаев существенно упрощает вычисления.

Замена переменных в двойном интеграле

Определим переход от переменных $(x, y) \in D$ к переменным $(q^1, q^2) \in D^*$ (замену переменных) соотношениями:

$$x = x(q^1, q^2), \quad y = y(q^1, q^2). \tag{5.19}$$

Если функции (5.19) имеют в некоторой области D^* непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля определитель:

$$I\left(q^1, q^2\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q^1} & \dfrac{\partial x}{\partial q^2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial q^1} & \dfrac{\partial y}{\partial q^2} \end{vmatrix}, \tag{5.20}$$

а функция $f(x, y)$ непрерывна в D, то имеет место формула *замены переменных в двойном интеграле*:

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy = \iint_{D^*} f\left[x\left(q^1,q^2\right),y\left(q^1,q^2\right)\right]\times \\ \times\left|I\left(q^1,q^2\right)\right|dq^1dq^2. \qquad (5.21)$$

Функциональный определитель (5.20) называется *якобианом* преобразования (5.19) и входит в подынтегральное выражение под знаком абсолютной величины. Достаточно объёмное доказательство формулы (5.21) не входит в наши планы. Однако приведём рассуждения, поясняющие её происхождение.

Новые переменные q^1, q^2 можно интерпретировать как криволинейные координаты на плоскости (соотношения (5.19) есть частный случай соотношений (3.2)). Радиус-вектор положения точки на плоскости (частный вариант (3.3)) запишется как:

$$\boldsymbol{r} = x(q^1, q^2)\boldsymbol{i} + y(q^1, q^2)\boldsymbol{j}. \qquad (5.22)$$

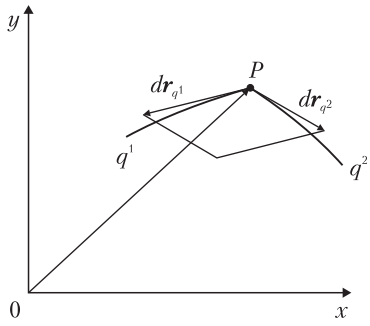

Рис. 14. Векторы $d\boldsymbol{r}_{q^1}$ *и* $d\boldsymbol{r}_{q^2}$, касающиеся координатных линий q^1 и q^2

И также, как в трёхмерном случае в § 3, введём понятие координатных линий q^1 и q^2 (рис. 14). Далее, пусть точке P соответствуют координаты q^1, q^2 и радиус-вектор $\boldsymbol{r}(q^1, q^2)$. Изменение координаты q^1 на величину dq^1 при фиксированном значении q^2 приводит к изменению положения радиус-вектора на величину частного дифференциала:

$$d\boldsymbol{r}_{q^1} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{q^1}}{\partial q^1}\partial q^1, \qquad (5.23)$$

или, принимая во внимание (5.22), получаем:

$$d\boldsymbol{r}_{q^1} = \frac{\partial x}{dq^1} dq^1 \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{dq^1} dq^1 \boldsymbol{j}. \tag{5.24}$$

За счёт изменения только q^2 на величину dq^2, по аналогии с (5.24), запишем выражение для частного дифференциала:

$$d\boldsymbol{r}_{q^2} = \frac{\partial x}{dq^2} dq^2 \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{dq^2} dq^2 \boldsymbol{j}. \tag{5.25}$$

Площадь dS элемента области в виде параллелограмма, построенного на векторах $d\boldsymbol{r}_{q^1}$ и $d\boldsymbol{r}_{q^2}$ (рис. 15), равна абсолютной величине векторного произведения этих векторов (по определению векторного произведения).

Воспользовавшись формулой векторного произведения через определитель, и учитывая равенство нулю составляющих вдоль базисного вектора $\boldsymbol{k}$ в (5.24) и (5.25), находим, что:

$$dS = \left| \left[d\boldsymbol{r}_{q^1}, d\boldsymbol{r}_{q^2} \right] \right| = \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q^1} \partial q^1 & \dfrac{\partial y}{\partial q^1} \partial q^1 & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial q^2} \partial q^2 & \dfrac{\partial y}{\partial q^2} \partial q^2 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Здесь внешние скобки означают модуль. Раскрытие этого определителя по первой строке приводит к равенству:

$$dS = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial q^1} \partial q^1 & \dfrac{\partial y}{\partial q^1} \partial q^1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial q^2} \partial q^2 & \dfrac{\partial y}{\partial q^2} \partial q^2 \end{matrix} \right| \boldsymbol{k} \Bigg\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial q^1} \partial q^1 & \dfrac{\partial y}{\partial q^1} \partial q^1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial q^2} \partial q^2 & \dfrac{\partial y}{\partial q^2} \partial q^2 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left| I\left(q^1, q^2\right) \right| dq^1 dq^2. \tag{5.26}$$

Следовательно, произведение $\left|I\left(q^1,q^2\right)\right|dq^1dq^2$ в формуле (5.21) имеет геометрический смысл площади элементов разбиения на криволинейные параллелограммы, по которым, с учётом подынтегральной функции, и происходит суммирование.

Замена переменных в тройном интеграле

Определим переход от переменных $(x, y, z) \in V$ к переменным $(q^1, q^2, q^3) \in V^*$ соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= x(q^1, q^2, q^3), \\ y &= y(q^1, q^2, q^3), \\ z &= z(q^1, q^2, q^3). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ задаёт положение точки P по её криволинейным координатам (q^1, q^2, q^3) в декартовом пространстве (x, y, z) и записывается формулой:

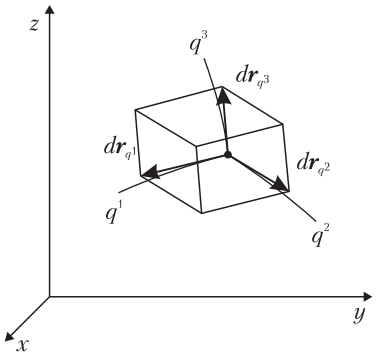

Рис. 15. Векторы $d\boldsymbol{r}_{q^1}$, $d\boldsymbol{r}_{q^2}$, $d\boldsymbol{r}_{q^3}$, касающиеся координатных линий q^1, q^2, q^3

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^1, q^2, q^3) = \\ = x(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{i} + \\ + y(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{j} + \\ + z(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

При поочерёдном изменении координат (q^1, q^2, q^3) вдоль координатных линий на величины (dq^1, dq^2, dq^3) соответственно (рис. 15), радиус-вектор получит приращения, главные части которых равны частным дифференциалам:

$$d\boldsymbol{r}_{q^1} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1} dq^1 = \frac{\partial x}{\partial q^1} dq^1 \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial q^1} dq^1 \boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial q^1} dq^1 \boldsymbol{k},$$

$$d\boldsymbol{r}_{q^2} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2} dq^2 = \frac{\partial x}{\partial q^2} dq^2 \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial q^2} dq^2 \boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial q^2} dq^2 \boldsymbol{k}, \qquad (5.28^*)$$

$$d\boldsymbol{r}_{q^3} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3} dq^3 = \frac{\partial x}{\partial q^3} dq^3 \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial q^3} dq^3 \boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial q^3} dq^3 \boldsymbol{k}.$$

Объём параллелепипеда dV, построенного на этих векторах (рис. 15), равен абсолютной величине их смешанного произведения, которое записывается в форме определителя:

$$dV = \left| \left(\left[d\boldsymbol{r}_{q^1}, d\boldsymbol{r}_{q^2} \right], d\boldsymbol{r}_{q^3} \right) \right| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial q^1} & \frac{\partial y}{\partial q^1} & \frac{\partial z}{\partial q^1} \\ \frac{\partial x}{\partial q^2} & \frac{\partial y}{\partial q^2} & \frac{\partial z}{\partial q^2} \\ \frac{\partial x}{\partial q^3} & \frac{\partial y}{\partial q^3} & \frac{\partial z}{\partial q^3} \end{matrix} \right\| dq^1 dq^2 dq^3. \qquad (5.29)$$

Здесь внешние вертикальные отрезки служат обозначением абсолютной величины определителя. Так как при замене всех строк на столбцы с тем же номером (т. е. при транспонировании матрицы определителя) значение определителя не изменяется, то в результате введения обозначения:

$$I\left(q^1, q^2, q^3\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q^1} & \frac{\partial x}{\partial q^2} & \frac{\partial x}{\partial q^3} \\ \frac{\partial y}{\partial q^1} & \frac{\partial y}{\partial q^2} & \frac{\partial y}{\partial q^3} \\ \frac{\partial z}{\partial q^1} & \frac{\partial z}{\partial q^2} & \frac{\partial z}{\partial q^3} \end{vmatrix}, \qquad (5.30)$$

выражение (5.29) примет вид:

$$dV = \left| I\left(q^1, q^2, q^3\right) \right| dq^1 dq^2 dq^3. \qquad (5.31)$$

Величина $I(q^1, q^2, q^3)$ называется *якобианом преобразования* (5.27), а формула (5.31) применяется для вычисления элемента объёма в новых переменных (или элемента объёма в криволинейных координатах).

В простейшем случае *декартовых* координат, полагая $q^1 = x$, $q^2 = y$, $q^3 = z$ и вычисляя якобиан согласно (5.30), получим:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

и элемент объёма (5.31) запишется в знакомой форме:

$$dV = dxdydz.$$

В случае цилиндрических координат $q^1 = \rho$, $q^2 = \varphi$, $q^3 = z$. Функцию соотношений (5.27) выполняют равенства (2.2):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

Убедимся, что якобиан преобразования, составленный по правилу (5.30), равен ρ:

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \geq 0. \tag{5.32}$$

Подставив это значение якобиана в (5.31), найдём выражение элемента объёма в цилиндрических координатах:

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \tag{5.33}$$

В сферических координатах имеют место соотношения (2.15):

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

так что вычисленный по ним якобиан (5.30) равен определителю:

$$I = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \geq 0. \quad (5.34)$$

Неотрицательность якобиана обусловлена тем, что $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Соответственно элемент объёма (5.31) в сферических переменных имеет вид:

$$dV = r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi. \quad (5.35)$$

Воспользуемся теперь обозначением объёмного интеграла в форме:

$$\int_V f(x,y,z)dV. \quad (5.36)$$

Подстановка в него выражения для элемента объёма (5.31) и учёта того факта, что переменные $(q^1, q^2, q^3) \in V^*$, приводит к **правильной** форме записи интеграла при переходе к новым переменным:

$$\int_V f(x,y,z)dV = \int_{V^*} f\left(x\left(q^1,q^2,q^3\right), y\left(q^1,q^2,q^3\right), z\left(q^1,q^2,q^3\right)\right)\times$$
$$\times\left|I\left(q^1,q^2,q^3\right)\right| dq^1 dq^2 dq^3. \quad (5.37)$$

Подчеркнём, что рассуждения, следующие после формулы (5.36), не являются доказательством равенства (5.37) и имели своей целью придать этому результату ожидаемый характер.

Замечание 1. Достаточным условием применимости формул (5.21) и (5.37) замены переменных в двойных и тройных интегралах является непрерывность частных производных функций (5.31), (5.27) и отличие якобиана преобразования **от нуля** во всей области интегрирования.

Замечание 2. В случае перехода к криволинейным ортогональным координатам формула для элемента объёма принимает особенно простой и легко запоминающийся вид. Для её вывода обратимся к соотношениям (5.28*) и запишем их через коэффициенты Ламе и базисные векторы согласно равенствам (1.13). В результате получим:

$$d\boldsymbol{r}_{q^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} dq^i = H_i dq^i \boldsymbol{e}_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{5.38}$$

Теперь подставим эти соотношения в первое равенство выражения для элемента объёма (5.29):

$$dV = \left| \left(\left[d\boldsymbol{r}_{q^1}, d\boldsymbol{r}_{q^2} \right], d\boldsymbol{r}_{q^3} \right) \right| = \left| H_1 H_2 H_3 \right| \times$$

$$\times \left| \left(\left[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \right], \boldsymbol{e}_3 \right) \right| dq^1 dq^2 dq^3 = H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3, \tag{5.39}$$

так как коэффициенты Ламе не отрицательные по определению (1.11), а смешанное произведение ортогональных базисных векторов равно единице. Подставив в полученную формулу цилиндрические переменные и соответствующие им коэффициенты Ламе (2.9), придём к равенству:

$$dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz,$$

что, как и должно быть, совпадает с (5.38).

Воспользовавшись значениями коэффициентов Ламе (2.22) в сферической системе координат, придём к выражению для элемента объёма в сферических переменных:

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr d\theta \, d\varphi,$$

совпадающему с ранее полученным результатом в (5.35).

§ 6. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ (ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА). ПРИМЕРЫ

При рассмотрении задач из многих разделов физики, в частности, формулировки основных уравнений макроскопической электродинамики, помимо ранее введённых определений двойного, объёмного и криволинейного интегралов понадобится понятие *поверхностного интеграла* второго рода, или, как его чаще называют в приложениях, *потока векторного поля* $\boldsymbol{a}$. Используемое в названии выражение "поток векторного поля" неслучайно. Так, в применении обсуждаемого понятия поверхностного интеграла к движению жидкости его величина оказывается равной количеству жидкости, протекающей в единицу времени через заданную поверхность, т. е. потоку жидкости, как он определяется в гидродинамике. Ниже вернёмся к этому вопросу при рассмотрении примеров вычисления поверхностных интегралов.

Итак, пусть задано векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t)$, т. е. каждой точке пространства, положение которой задаётся вектором $\boldsymbol{r}$, или некоторой его части, в каждый момент времени t поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t)$. Переменная времени в определении поверхностного интеграла не играет роли, поэтому в целях сокращения обозначения векторного поля эту переменную далее будем опускать и писать просто $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$.

Выберем в пространстве некоторую поверхность Σ, которая может быть как замкнутой, так и незамкнутой. В каждой точке поверхности построим единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$. В случае замкнутой поверхности общепринято в математике выбирать направление внешней нормали (его называют положительным направлением), иными словами выбирают единичный вектор, направленный в сторону неограниченной части пространства. Если поверхность незамкнутая, то выбирается одно из возможных направлений (из соображений

удобства или произвольно), однако с чётким указанием выбранного направления (на рисунке или аналитической форме записи).

На основании сказанного в нашем распоряжении имеется три объекта: векторное поле, поверхность и единичный вектор нормали:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}),\quad \Sigma,\quad \boldsymbol{n}, \tag{I}$$

на которые будем ссылаться в определении потока векторного поля.

Определение потока векторного поля или поверхностного интеграла второго рода.

1. Разобьём поверхность Σ произвольной сеткой линий на n малых элементов поверхности $\Delta\Sigma_i$ ($i = 1, 2, ..., n$), площади которых обозначим как ΔS_i, а диаметры элементов (наибольшее расстояние между точками области) — через d_i.

2. В каждом из элементов $\Delta\Sigma_i$ выберем произвольную точку M_i, радиус-вектор которой $\boldsymbol{r}_i$, и пусть $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_i)$ — значение векторного поля в точке M_i.

3. Составим **скалярное** произведение векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_i)$ в точке M_i на вектор единичной нормали $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_i)$ в той же точке, умножим полученное произведение на площадь элемента поверхности ΔS_i:

$$(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_i), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_i))\Delta S_i.$$

4. Составим сумму полученных произведений по всем элементам разбиения:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{r}_i\right),\boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{r}_i\right)\right)\Delta S_i. \tag{II}$$

Сумма (II) называется *интегральной суммой* векторной функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_i)$ на поверхности Σ.

5. Перейдём к пределу интегральной суммы (II) при стремлении числа разбиений n поверхности Σ к бесконечности так, что максимальный диаметр d_i стремится к нулю ($\max d_i \to 0$).

Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения поверхности Σ на малые элементы, ни от выбора точек M_i в них, то он называется *поверхностным интегралом второго рода* (или *потоком*) от векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ по поверхности Σ и обозначается символами:

$$\int_{\Sigma}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,dS \quad \text{или} \quad \int_{\Sigma}(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{S}), \tag{III}$$

если учесть, что $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})dS = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}dS) = (\boldsymbol{a},d\boldsymbol{S})$ (число можно вносить под знак скалярного произведения; кроме того, введено обозначение для так называемого векторного элемента поверхности $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$). Далее встретимся и с другими обозначениями обсуждаемого интеграла.

Из вышеизложенного следует, что поток векторного поля определяется равенством:

$$\int_{\Sigma}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_i),\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_i)\right)\Delta S_i. \tag{IV}$$

Данное определение при рассмотрении прикладных задач позволяет установить, является ли интеграл поверхностным второго типа или каким-либо иным. Если в условии задачи речь идёт об объектах (I) и требуется провести суммирование по элементам поверхности, то задача сводится к записи поверхностного интеграла в форме (III) и последующего его вычисления. В отдельных простейших случаях (именно такие и встретятся в предлагаемом курсе) вычисление удаётся осуществить на основе определения, без применения специальных методов вычисления.

Тем не менее ниже изложим общий подход к решению задач, связанных с нахождением потока векторного поля.

6.1. Площадь элемента поверхности

Аналитически поверхность Σ в трёхмерном пространстве может быть задана в явном виде в форме уравнения:

$$\Sigma:\ z = f(x, y), \tag{6.1}$$

определяющего зависимость декартовой координаты z от координат $x, y \in D$. Более общей формой задания поверхности является параметрический способ, при котором задаются три функции x, y, z как функции двух параметров (аргументов) $u, v \in D$:

$$\Sigma: x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \tag{6.2}$$

Для сравнения заметим, что параметрическое задание кривой L определяется заданием трёх функций от одного параметра (4.4).

Явное задание поверхности (6.1) является частным случаем параметрического задания (6.2). Действительно, если в качестве параметров u, v выбрать x, y, то явная форма представления поверхности (6.1) в параметрическом виде запишется так:

$$\Sigma: x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \tag{6.3}$$

что и подтверждает сделанное выше утверждение.

Перейдём к выводу формулы, по которой рассчитывается площадь элемента поверхности, заданной в параметрической форме. На основании (6.2) запишем уравнение поверхности в векторном виде:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j} + z(u, v)\boldsymbol{k}. \tag{6.4}$$

Изменение переменной u на величину du вызовет изменение радиус-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ на величину частного дифференциала $d\boldsymbol{r}_u$, равного:

$$d\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} du, \tag{6.5}$$

который, имея в ввиду (6.4), в развёрнутой форме записи будет иметь вид:

$$d\boldsymbol{r}_u = (x_u\boldsymbol{i} + y_u\boldsymbol{j} + z_u\boldsymbol{k})du. \tag{6.6}$$

Здесь, как обычно, x_u, y_u, z_u частные производные функций (6.2) по переменной u. Вектор $d\boldsymbol{r}_u$ является вектором, касательным к u-линии, показанной на рисунке 16.

Изменение переменной v на величину dv приведёт к изменению радиус-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ на величину частного дифференциала $d\boldsymbol{r}_v$ равного:

$$d\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dv, \tag{6.7}$$

который, опять согласно (6.4), в развёрнутой форме записи будет иметь вид:

$$d\boldsymbol{r}_v = (x_v \boldsymbol{i} + y_v \boldsymbol{j} + z_v \boldsymbol{k}) dv. \tag{6.8}$$

В правой части в качестве коэффициентов при базисных векторах стоят частные производные функций (6.2) по параметру v.

Вектор, построенный как векторное произведение $d\boldsymbol{r}_u$ и $d\boldsymbol{r}_v$, как раз и является векторным элементом поверхности $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS$, о котором шла речь в комментарии к формуле (5.25). Действительно, с одной стороны он перпендикулярен к элементу поверхности (являясь векторным произведением), с другой стороны его модуль равен площади параллелограмма, построенного на векторах $d\boldsymbol{r}_u$ и $d\boldsymbol{r}_v$.

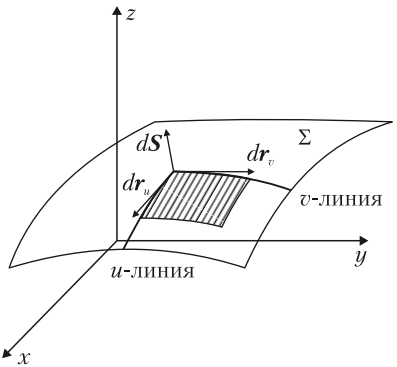

Рис. 16. Векторы $d\boldsymbol{r}_u$, $d\boldsymbol{r}_v$, касательные к u, v линиям соответственно. Вектор $d\boldsymbol{S}$ перпендикулярен заштрихованному элементу поверхности

Таким образом, приходим к заключению, что:

$$d\boldsymbol{S} = [d\boldsymbol{r}_u, d\boldsymbol{r}_v]. \tag{6.9}$$

Практическое использование полученного соотношения предполагает представление правой части (6.9) в виде формального определителя векторного произведения:

$$\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

в которое вместо координат векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ следует подставить координаты векторов $d\boldsymbol{r}_u$, $d\boldsymbol{r}_v$:

$$d\boldsymbol{S}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}dudv. \tag{6.10}$$

В соответствующем месте эта формула будет использована для вычисления векторного элемента поверхности и площади dS элемента поверхности, равного абсолютной величине вектора $d\boldsymbol{S}$:

$$dS=\left|d\boldsymbol{S}\right|. \tag{6.11}$$

6.2. Площадь элемента на поверхности уровня криволинейной ортогональной системы координат

В тех случаях, когда рассматривается поверхность уровня криволинейной ортогональной системы координат, удобнее использовать для вычисления векторного элемента поверхности и площади элемента поверхности приводимые ниже формулы:

$$d\boldsymbol{S}_1 = H_2H_3dq^2dq^3\boldsymbol{e}_1,\quad d\boldsymbol{S}_2 = H_3H_1dq^3dq^1\boldsymbol{e}_2,$$
$$d\boldsymbol{S}_3 = H_1H_2dq^1dq^2\boldsymbol{e}_3; \tag{6.12}$$

$$dS_1 = H_2H_3dq^2dq^3,\quad dS_2 = H_3H_1dq^3dq^1,$$
$$dS_3 = H_1H_2dq^1dq^2. \tag{6.13}$$

Здесь $d\boldsymbol{S}_1$, $d\boldsymbol{S}_2$, $d\boldsymbol{S}_3$ и dS_1, dS_2, dS_3 являются векторными элементами и площадями элементов, расположенными на поверхностях уровней $q^1 = \text{Const.}$, $q^2 = \text{Const.}$, $q^3 = \text{Const.}$ соответственно.

Приведём доказательство соотношений (6.12) и (6.13). Радиус-вектор положения точки в пространстве определяется выражением (1.4) и равен:

$$\boldsymbol{r} = x(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{i} + y(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{j} + z(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{k}. \qquad (6.14)$$

Параметрическое задание какой-либо поверхности уровня определяется из (6.14) — для этого следует считать в указанном выражении соответствующую криволинейную координату постоянной величиной, а оставшиеся два параметра будут иметь смысл параметров u, v в формуле (6.4). Следуя сказанному, зафиксируем переменную q^1. Это означает, что выделена поверхность уровня $q^1 = \text{Const.}$, и нашей целью является доказательство первого равенства в (6.12). Для этого остаётся воспользоваться выражениями (6.5) и (6.7), положив в них $u = q^2$, $v = q^3$, что приведёт к равенствам:

$$d\boldsymbol{r}_{q^2} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2} dq^2, \qquad d\boldsymbol{r}_{q^3} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3} dq^3,$$

из которых следует, что:

$$d\boldsymbol{r}_{q^2} = H_2 dq^2 \boldsymbol{e}_2, \qquad d\boldsymbol{r}_{q^3} = H_3 dq^3 \boldsymbol{e}_3. \qquad (6.15)$$

в силу ранее установленных соотношений (1.13). Равенство (6.9), записанное в переменных q^2, q^3, примет вид:

$$d\boldsymbol{S}_1 = \left[d\boldsymbol{r}_{q^2}, d\boldsymbol{r}_{q^3} \right]. \qquad (6.16)$$

Для получения конечного выражения следует подставить (6.15) в (6.16), вынести числовые множители за знак векторного произведения и воспользоваться формулой векторного произведения, применив её к тройке векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. В результате получим, что:

$$d\boldsymbol{S}_1 = H_2 dq^2 H_3 dq^3 [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] = H_2 H_3 dq^2 dq^3 \boldsymbol{e}_1, \qquad (6.17)$$

а площадь элемента поверхности равна модулю выражения (6.17):

$$dS_1 = H_2 H_3 dq^2 dq^3. \qquad (6.18)$$

Оставшиеся выражения в (6.12), (6.13) получаются из (6.17) и (6.18) путём циклической перестановки индексов.

6.3. Примеры вычисления векторного элемента поверхности и площади элемента поверхности

Пример № 1

Уравнение поверхности цилиндра радиуса R, ось которого направлена вдоль оси z декартовой системы координат, имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (6.19)$$

Требуется найти векторный элемент поверхности на поверхности цилиндра и площадь элемента поверхности в координатах φ, z (т. е. в переменных φ, z цилиндрической системы координат).

Решение

Общие уравнения (6.2) согласно (3.9) имеют вид:

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z, \qquad (6.20)$$

так как $\rho = R$. Роль параметров u, v, фигурирующих в формуле (6.10), играют переменные φ, z. Подставляя результаты вычисления частных производных функций (6.20) в (6.10), находим выражение для векторного элемента поверхности:

$$d\boldsymbol{S} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\varphi dz =$$

$$= R\left(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}\right) d\varphi dz. \qquad (6.21)$$

Но согласно (2.10) выражение в скобках равно базисному вектору $\boldsymbol{e}_\rho$ цилиндрической системы координат, поэтому:

$$d\boldsymbol{S} = Rd\varphi dz\boldsymbol{e}_\rho, \qquad (6.22)$$

что и следовало ожидать, так как вектор $d\boldsymbol{S}$ должен быть перпендикулярным поверхности, а вектор $\boldsymbol{e}_\rho$ обладает этим свойством. Что касается площади элемента поверхности, то, в соответствии с правилом (6.11), получим:

$$dS = \left| Rd\varphi dz\boldsymbol{e}_\rho \right| = Rd\varphi dz. \qquad (6.23)$$

Полученные результаты будут востребованы при вычислении потоков векторных полей.

Пример № 2

Уравнение боковой поверхности конуса, радиус основания которого равен R, а ось направлена вдоль оси z декартовой системы координат, имеет вид:

$$z = R - \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 0 \le z \le R. \qquad (6.24)$$

Требуется найти векторный элемент на поверхности конуса и площадь элемента поверхности в координатах ρ, φ (т. е. в переменных ρ, φ цилиндрической системы координат).

Решение

Запишем данное уравнение поверхности конуса (6.24) в параметрическом виде:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = R - \rho. \qquad (6.25)$$

Последнее из равенств (6.25) является следствием (6.24) и того, что $\sqrt{x^2+y^2} = |\rho| = \rho$, так как $\rho \leqslant 0$.

Найдём вектор $d\boldsymbol{S}$, вычисляя частные производные функций (6.25), являющиеся элементами определителя (6.10) (роль параметров u, v теперь выполняют переменные ρ, φ):

$$d\boldsymbol{S} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -1 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} d\rho d\varphi. \qquad (6.26)$$

Раскрывая определитель, получим, что:

$$d\boldsymbol{S} = (\rho\cos\varphi\boldsymbol{i} + \rho\sin\varphi\boldsymbol{j} + \rho\boldsymbol{k})d\rho d\varphi \qquad (6.27)$$

или, согласно (2.10):

$$d\boldsymbol{S} = (\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\boldsymbol{k})d\rho d\varphi. \qquad (6.28)$$

Элемент площади поверхности (при вычислении используем равенство (6.11) и ортогональность базисных векторов $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{k}$), равен:

$$dS = |d\boldsymbol{S}| = \sqrt{\rho^2+\rho^2}\,d\rho d\varphi = \sqrt{2}\rho d\rho d\varphi. \qquad (6.29)$$

Пример № 3

Требуется найти векторный элемент $d\boldsymbol{S}$ на поверхности сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (6.30)$$

и площадь элемента поверхности в координатах θ, φ (т. е. в переменных θ, φ сферической системы координат).

Решение

Запишем уравнение поверхности сферы в параметрическом виде, выбирая в качестве параметров u, v переменные θ, φ.

Для этого обратимся к равенствам (2.15) и положим в них $r = R$. Напомним, что поверхностью уровня $r = R$ является сфера. Итак, имеем:

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta. \qquad (6.31)$$

Как и в предыдущем примере, найдём вектор $d\boldsymbol{S}$, вычисляя частные производные функций (6.31), являющиеся элементами определителя (6.10) (роль параметров u, v теперь выполняют переменные θ, φ):

$$d\boldsymbol{S} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} d\theta d\varphi. \qquad (6.32)$$

Раскрывая определитель, получим, что:

$$d\boldsymbol{S} = R^2(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k})\sin\theta\, d\rho d\varphi \qquad (6.33)$$

или, согласно (2.23):

$$d\boldsymbol{S} = R^2\sin\theta\, d\rho d\varphi \boldsymbol{e}_r, \qquad (6.34)$$

т. е. векторный элемент направлен вдоль базисного вектора $\boldsymbol{e}_r$ сферической системы координат, что вполне понятно, так как вектор $d\boldsymbol{S}$ перпендикулярен поверхности сферы. Элемент площади поверхности на поверхности сферы, если воспользоваться выражением (6.11), равен:

$$dS = \left|d\boldsymbol{S}\right| = R^2\sin\theta d\theta d\varphi. \qquad (6.35)$$

Этот результат получается из (6.18) особенно просто. Полагая в этой формуле q^2, q^3 равными θ, φ и используя значения (2.22) коэффициентов $H_\theta = r$, $H_\varphi = r\sin\theta$, получим результат (6.35) для площади элемента на поверхности сферы.

6.4. Примеры вычисления потока векторного поля

Пример № 1

Требуется найти поток векторного поля:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{6.36}$$

через замкнутую поверхность:

$$z = R - \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad z = 0 \ \ \left(0 \le z \le R\right). \tag{6.37}$$

Решение

Искомый поток П через замкнутую поверхность можно записать в виде суммы потока векторного поля через основание конуса $\Pi_{ос}$, расположенного в плоскости xOy, и потока через боковую поверхность конуса $\Pi_{бок}$, о которой шла речь в примере № 2 пункта 6.3:

$$\Pi = \Pi_{ос} + \Pi_{бок}. \tag{6.38}$$

Каждый из этих потоков, согласно определению (III), представляется поверхностным интегралом второго рода, а именно:

$$\Pi_{ос} = \int_{\Sigma_{ос}} \left(\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{S}\right) \quad \text{и} \quad \Pi_{бок} = \int_{\Sigma_{бок}} \left(\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{S}\right). \tag{6.39}$$

Вычисление первого интеграла особенно просто. Действительно, значение скалярного произведения $(\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{S})$ следует вычислять в точках поверхности основания конуса $\Sigma_{ос}$, для которых координата $z = 0$, поэтому векторное поле (6.36) становится равным:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}, \tag{6.40}$$

в то время как вектор $d\boldsymbol{S}$, направленный по внешней нормали $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$ (по определению для замкнутой поверхности), равен:

$$d\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{k}dS. \qquad (6.41)$$

На основании (6.40) и (6.41) ортогональность векторов $\boldsymbol{r}$ и $d\boldsymbol{S}$ становится очевидной, в силу чего скалярное произведение $(\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{S}) = 0$. Таким образом, поток через основание конуса также обращается в нуль.

Перейдём к вычислению второго интеграла в (6.39). У нас уже есть опыт вычисления векторного элемента поверхности на боковой поверхности конуса. Поэтому, ссылаясь на результат (6.28), запишем, что:

$$d\boldsymbol{S} = (\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\boldsymbol{k})d\rho d\varphi. \qquad (6.42)$$

Обратим внимание, что, как и должно быть, этот вектор направлен по внешней нормали.

Напомним, что элемент $d\boldsymbol{S}$ записан в цилиндрических координатах. Представим векторное поле, вычисленное на боковой поверхности конуса, в тех же координатах. С этой целью подставим в (6.36) равенства $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ и учтём, как это следует из (6.37), что $z = 1 - \rho$. В результате получим:

$$\boldsymbol{r}\big|_{\Sigma_{\text{бок}}} = \big(x\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\big)\big|_{\Sigma_{\text{бок}}} =$$

$$= \rho\cos\varphi\boldsymbol{i} + \rho\sin\varphi\boldsymbol{j} + \big(R-\rho\big)\boldsymbol{k} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + \big(R-\rho\big)\boldsymbol{k}, \qquad (6.43)$$

где при переходе к последнему равенству было использовано соотношение (2.10).

Скалярное произведение векторов (6.42) и (6.43), в силу ортогональности $\boldsymbol{e}_\rho$ и $\boldsymbol{k}$, легко вычисляется, так что в результате получим:

$$\big(\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{S}\big)\big|_{\Sigma_{\text{бок}}} = \Big[\rho^2 + \rho\big(R-\rho\big)\Big]d\rho d\varphi = R\rho d\rho d\varphi. \qquad (6.44)$$

Подставив найденное подынтегральное выражение во второй интеграл (6.39), сведём задачу к вычислению простого двойного интеграла вида:

$$\Pi_{\text{бок}} = \int_{\Sigma_{\text{бок}}} \left(\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{S}\right) = \iint_D R\rho d\rho d\varphi, \tag{6.45}$$

где D — область изменения переменных ρ, φ ($0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$). Для вычисления двойного интеграла его следует свести к повторному. Следуя этому правилу, будем иметь:

$$\Pi_{\text{бок}} = \iint_D R\rho d\rho d\varphi = R\int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^3. \tag{6.46}$$

Пример № 2

Требуется найти поток векторного поля:

$$D = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{6.47}$$

через поверхность сферы Σ: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, q = Const.

Решение

Поток Π по определению (III) равен:

$$\Pi = \oint_\Sigma \left(\boldsymbol{D}, d\boldsymbol{S}\right). \tag{6.48}$$

Векторное поле задано в сферической системе координат. Поэтому воспользуемся выражением (6.34) для векторного элемента площади:

$$d\boldsymbol{S} = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \boldsymbol{e}_r \tag{6.49}$$

на поверхности сферы в сферических переменных. Интересующее нас значение скалярного произведения под знаком интеграла (6.48), вычисленное на поверхности сферы, находится путём перемножения векторов (6.47) и (6.49) и равно:

$$\left(\boldsymbol{D}, d\boldsymbol{S}\right)\Big|_{r=R} = \left(\frac{q}{4\pi}\frac{1}{r^2}R^2\right)\Big|_{r=R} \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{q}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi. \tag{6.50}$$

После подстановки (6.50) в выражение потока (6.48) сведём задачу к вычислению двойного, а затем и к повторному интегралу:

$$\Pi = \oint_{\Sigma} \left(\boldsymbol{D}, d\boldsymbol{S} \right) = \iint_{D} \frac{q}{4\pi} \sin\theta d\theta d\varphi =$$
$$= \frac{q}{4\pi} \int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{0}^{2\pi} d\varphi = q. \qquad (6.51)$$

При обсуждении электростатической теоремы Гаусса вернёмся к полученному результату (6.51), переписав его в форме:

$$\oint_{\Sigma} \left(\boldsymbol{D}, d\boldsymbol{S} \right) = q. \qquad (6.52)$$

§ 7. ИНВАРИАНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО—ГАУССА

Одни и те же закономерности в ряде случаев могут быть представлены различными математическими формами записей. Так, в макроскопической электродинамике применяются две эквивалентные формулировки описания законов электромагнитных явлений, называемые интегральной и дифференциальной формой представления уравнений Максвелла. Сами названия форм записи уравнений отражают тот факт, что в одном случае уравнения содержат интегралы (криволинейные и поверхностные), в другом — дифференциальные операторы, например, оператор ротора векторного поля, а также оператор дивергенции или расхождения, которые нам и предстоит далее обсудить.

Возможность перехода от одной формы записи уравнений к другой основана на использовании важнейших интегральных теорем векторного анализа — теоремы Остроградского—Гаусса и теоремы Стокса. Доказательство и обсуждение этих теорем являются целью настоящего и следующего параграфов.

Начнём с введения оператора дивергенции векторного поля. Выберем в области определения векторного поля некоторую точку P и окружим её малой замкнутой поверхностью Σ_P, где индекс P указывает, что точка находится внутри объёма ΔV_P, ограниченного поверхностью Σ_P. В качестве характеристики векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ в рассматриваемой точке выберем поток векторного поля через поверхность Σ_P, приходящийся на единицу объёма, т. е. разделим его на объём ΔV_P, и в этом отношении перейдём к пределу, устремив диаметр ΔV_P к нулю, иными словами, стягивая объём в точку P.

В результате этих действий придём к локальной числовой характеристике поля, называемой *дивергенцией* или *расходимостью* вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ и являющейся мерой потока, порождаемого единицей объёма. Используя для значения дивергенции в точке P обозначение $\operatorname{div}\boldsymbol{a}\big|_P$, согласно приведённому определению, запишем:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}\big|_P = \lim_{\Delta V_P \to 0} \frac{\oint_{\Sigma_P} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS}{\Delta V_P}. \qquad (7.1)$$

Присутствующая в этом выражении нормаль является по определению **внешней** нормалью, т. е. направлена в сторону неограниченной части пространства. В дальнейшем в ряде случаев будем опускать обозначение точки символом P в левой части (7.1).

Данное определение замечательно тем, что значение дивергенции не зависит от выбора системы координат, так как входящие в выражение (7.1) скалярное произведение и объём имеют одно и то же значение во всех системах координат. По этой причине определение в форме (7.1) называют инвариантным определением дивергенции. Важно и то, что при рассмотрении конкретных задач использование этого определения позволяет придать понятию дивергенции физический смысл. Так, например, в гидродинамике роль векторного поля играет поле скоростей жидкости $\boldsymbol{v}$. В этом случае дивергенция скоростей жидкости по определению (7.1) равна:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta V_P \to 0} \frac{\oint_{\Sigma} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})\, dS}{\Delta V}.$$

Скалярное произведение, записанное в виде:

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}) = v_n$$

и умноженное на площадь элемента поверхности dS, есть ни что иное, как объём жидкости, протекающей в единицу времени через площадку dS и, следовательно:

$$\oint_{\Sigma}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})\,dS$$

равен объёму количества жидкости, вытекающему из объёма ΔV через всю поверхность Σ в единицу времени.

Наконец, опираясь на это определение, нетрудно доказать теорему Остроградского—Гаусса:

$$\oint_{\Sigma}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,dS = \int_{V}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dV,$$

с помощью которой поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности преобразуется в объёмный и наоборот.

7.1. Дифференциальное выражение дивергенции векторного поля

Использовать определение (7.1) для конкретного вычисления дивергенции затруднительно. Однако оказывается, что при выполнении некоторых дополнительных ограничений, накладываемых на векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, возможен переход от интегральной формы представления оператора дивергенции к дифференциальной форме, в которой оператор записывается через частные производные по координатам и коэффициенты Ламе. Действительно, пусть выбрана некоторая **ортогональная** криволинейная система координат (q^1, q^2, q^3) и $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ базисные векторы в ней. Векторное поле, записанное в этом базисе, имеет вид:

$$\boldsymbol{a}(q^1, q^2, q^3) = a_1(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{e}_1 + a_2(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{e}_2 +$$

$$+ a_3(q^1, q^2, q^3)\boldsymbol{e}_3, \qquad (7.2)$$

где $a_i(q^1, q^2, q^3)$ — координаты вектора $\boldsymbol{a}$ (i = 1, 2, 3). Докажем, что, при условии непрерывности частных производных

координат векторного поля $a_i(q^1, q^2, q^3)$ по переменным (q^1, q^2, q^3), из определения оператора дивергенции (7.1) следует равенство:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial\left(H_2 H_3 a_1\right)}{\partial q^1} + \frac{\partial\left(H_3 H_1 a_2\right)}{\partial q^2} + \frac{\partial\left(H_1 H_2 a_3\right)}{\partial q^3}\right], \quad (7.3)$$

которое и используется для проведения практических вычислений. Прежде чем перейти к доказательству этого выражения, рассмотрим вид оператора дивергенции в различных координатах. Воспользовавшись известными нам значениями коэффициентов H_i (i = 1, 2, 3) в декартовой системе координат ($H_1 = H_2 = H_3 = 1$), из (7.3), полагая, что $q^1 = x$, $q^2 = y$, $q^3 = z$, а также $a_1 = a_x$, $a_2 = a_y$, $a_3 = a_z$, получим выражение для дивергенции в декартовой системе координат:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (7.4)$$

Действуя по аналогии с предыдущим вариантом, в цилиндрической системе координат, в которой $q^1 = \rho$, $q^2 = \varphi$, $q^3 = z$, а коэффициенты $H_1 = H_\rho = 1$, $H_2 = H_\varphi = \rho$, $H_3 = H_z = 1$ из (2.9), для оператора дивергенции будем иметь:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(\rho a_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{\partial\left(a_\varphi\right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial\left(\rho a_z\right)}{\partial z}\right] = \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (7.5)$$

Здесь a_ρ, a_φ, a_z являются координатами векторного поля, разложенного по базисным векторам цилиндрической системы координат, т. е.:

$$\boldsymbol{a}(\rho, \varphi, z) = a_\rho(\rho, \varphi, z)\boldsymbol{e}_\rho + a_\varphi(\rho, \varphi, z)\boldsymbol{e}_\varphi + a_z(\rho, \varphi, z)\boldsymbol{e}_z. \quad (7.6)$$

В случае сферической системы координат полагаем $q^1 = r$, $q^2 = \theta$, $q^3 = \varphi$. Что касается коэффициентов H_i (i = 1, 2, 3),

то последние определяются равенствами (2.22): $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_\theta = r$, $H_3 = H_\varphi = r\sin\theta$. Записав векторное поле в базисе векторов сферической системы координат как:

$$\boldsymbol{a}(r, \theta, \varphi) = a_r(r, \theta, \varphi)\boldsymbol{e}_r + a_\theta(r, \theta, \varphi)\boldsymbol{e}_\theta + a_\varphi(r, \theta, \varphi)\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad (7.7)$$

в результате всех упомянутых замен обозначений получим выражение для оператора дивергенции в интересующей системе координат:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(r^2\sin\theta a_r\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(r\sin\theta a_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(r a_\varphi\right)}{\partial\varphi}\right]$$

или, раскрывая скобки и вынося соответствующие множители за знаки частных производных, придём к следующему результату:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 a_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta a_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}. \qquad (7.8)$$

Выбор нужного вида оператора из совокупности выражений (7.4), (7.5) и (7.8) зависит от характера симметрии задачи или системы координат, в которой задано векторное поле.

Обратимся к выводу формулы (7.3), опираясь на определение (7.1), которое здесь вновь воспроизведём:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}\big|_P = \lim_{\Delta V_P \to 0}\frac{\oint_{\Sigma_P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,dS}{\Delta V_P}, \qquad (7.9)$$

выбрав в качестве объёма ΔV_P объём бесконечно малого криволинейного параллелепипеда, одной из вершин которого является точка P, в которой и определяется значение дивергенции (рис. 17). Возрастание координат будем полагать происходящим в направлениях, указанных на рисунке. В таком случае направления базисных векторов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ будут совпадать с направлениями соответствующих координатных линий. Поток через замкнутую поверхность, ограничиваю-

щую параллелепипед, равен сумме потоков через его грани, каждая из которых лежит на соответствующей поверхности уровня. Рассмотрим две бесконечно малые противоположные грани, обозначенные на рисунке вершинами $P_1M_3MM_1$ и $PP_2M_2P_3$, и рассчитаем пронизывающий их суммарный поток:

$$\int_{\Sigma_{P_1M_3MM_1}} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,dS + \int_{\Sigma_{PP_2M_2P_3}} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,dS. \qquad (7.10)$$

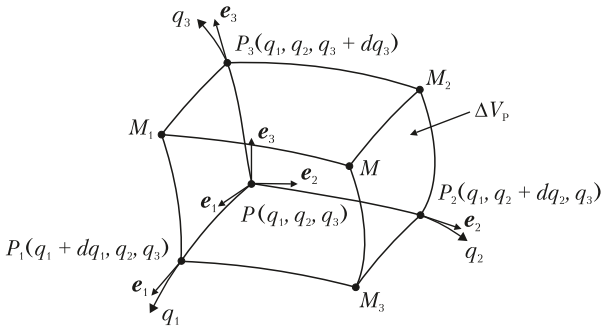

Рис. 17. Грани криволинейного параллелепипеда, расположенные на поверхностях уровней

Заменим входящие сюда интегралы их приближёнными значениями (пользуясь тем, что грани бесконечно малые) и которые при стремлении объёма ΔV_P к нулю переходят в точные соотношения. Рассмотрим первое слагаемое в (7.10). Площадь элемента поверхности $\Sigma_{P_1M_3MM_1}$, в соответствии с первым выражением из (6.13), равна:

$$H_2(P_1)H_3(P_1)dq^2dq^3, \qquad (7.11)$$

при этом произведение коэффициентов Ламе будем считать вычисленным в точке P_1, координаты которой равны (q^1 + + dq^1, q^2, q^3). Внешняя нормаль $\boldsymbol{n}$, взятая в точке P_1, совпадает с единичным базисным вектором $\boldsymbol{e}_1$, построенным в той же точке. Поэтому скалярное произведение, если воспользоваться разложением векторного поля (7.2), оказывается равным:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\big|_{P_1} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1)\big|_{P_1} = \big(a_1(P_1)\boldsymbol{e}_1 + a_2(P_1)\boldsymbol{e}_2 +$$

$$+ a_3(P_1)\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1\big) = a_1(P_1). \qquad (7.12)$$

Для определения потока через элемент поверхности $\Sigma_{P_1M_3MM_1}$ следует перемножить выражения (7.11) и (7.12), так что получим:

$$\int_{\Sigma_{P_1M_3MM_1}} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,dS \cong H_2(P_1)H_3(P_1)a_1(P_1)dq^2dq^3 =$$

$$= (H_2H_3a_1)(P_1)dq^2dq^3 = (H_2H_3a_1)\big|_{q^1+dq^1,\,q^2,\,q^3}\,dq^2dq^3. \qquad (7.13)$$

Выражение $(H_2H_3a_1)\big|_{q^1+dq^1,\,q^2,\,q^3}$ представляет собой значение функции $H_2H_3a_1$, вычисленное в точке с координатами $q^1 + dq^1$, q^2, q^3.

Вклад второго слагаемого в (7.10), то есть поток через элемент поверхности $\Sigma_{PP_2M_2P_3}$ определяется в основном тем же выражением (7.13), в котором следует заменить координаты точки P_1 на координаты q^1, q^2, q^3 точки P. Далее, внешняя нормаль, построенная в точке P, направлена противоположно базисному вектору $\boldsymbol{e}_1$. По этой причине в скалярном произведении, в отличие от (7.12), появится знак минус:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\big|_P = -(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1)\big|_P = -a_1(P), \qquad (7.14)$$

так что взамен выражения (7.13) получим:

$$\int_{\Sigma_{PP_2M_2P_3}} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,dS = -(H_2H_3a_1)\big|_{q^1,\,q^2,\,q^3}\,dq^2dq^3. \qquad (7.15)$$

Полный поток через рассмотренные бесконечно малые грани равен сумме выражений (7.13) и (7.15), т. е.:

$$\Big[(H_2H_3a_1)\big|_{q^1+dq^1,\,q^2,\,q^3} - (H_2H_3a_1)\big|_{q^1,\,q^2,\,q^3}\Big]dq^2dq^3. \qquad (7.16)$$

Стоящее в прямых скобках частное приращение функции $H_2H_3a_1$ по переменной q^1, заменим на частный дифференциал:

$$\left[\left(H_2H_3a_1\right)\Big|_{q^1+dq^1,\,q^2,\,q^3}-\left(H_2H_3a_1\right)\Big|_{q^1,\,q^2,\,q^3}\right]=\frac{\partial\left(H_2H_3a_1\right)}{\partial q^1}dq^1, \quad (7.17)$$

что приводит к возможности, подставляя (7.17) в (7.16), записать окончательный результат для суммарного потока через выбранные грани в виде:

$$\int_{\Sigma_{P_1M_3MM_1}}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\right)dS+\int_{\Sigma_{PP_2M_2P_3}}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\right)dS\cong\frac{\partial\left(H_2H_3a_1\right)}{\partial q^1}dq^1dq^2dq^3. \quad (7.18)$$

Повторяя аналогичные рассуждения с двумя другими парами противоположно расположенных граней, приходим к формулам для соответствующих потоков (последние получаются из (7.18) циклической перестановкой индексов):

$$\int_{\Sigma_{P_2M_2MM_3}}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\right)dS+\int_{\Sigma_{PP_1M_1P_3}}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\right)dS\cong\frac{\partial\left(H_3H_1a_2\right)}{\partial q^2}dq^1dq^2dq^3, \quad (7.19)$$

$$\int_{\Sigma_{P_3M_1MM_2}}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\right)dS+\int_{\Sigma_{PP_2M_3P_1}}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\right)dS\cong\frac{\partial\left(H_1H_2a_3\right)}{\partial q^3}dq^1dq^2dq^3. \quad (7.20)$$

Поток через замкнутую поверхность бесконечно малого параллелепипеда, стоящий в числителе определения дивергенции (7.9), равен сумме выражений (7.18), (7.19) и (7.20) т. е.:

$$\oint_{\Sigma_P}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\right)dS=\left[\frac{\partial\left(H_2H_3a_1\right)}{\partial q^1}+\frac{\partial\left(H_3H_1a_2\right)}{\partial q^2}+\frac{\partial\left(H_1H_2a_3\right)}{\partial q^3}\right]\times$$

$$\times dq^1dq^2dq^3. \quad (7.21)$$

Воспользовавшись формулой (5.39) для элементарного объёма:

$$\Delta V_P = H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3 \qquad (7.22)$$

и полученным выражением для потока (7.21), а также определением дивергенции (7.9), получаем интересующее нас дифференциальное выражение дивергенции векторного поля в **ортогональной криволинейной** системе координат:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial\left(H_2 H_3 a_1\right)}{\partial q^1} + \frac{\partial\left(H_3 H_1 a_2\right)}{\partial q^2} + \frac{\partial\left(H_1 H_2 a_3\right)}{\partial q^3}\right]. \qquad (7.23)$$

Как уже отмечалось, именно это выражение используется для вычисления дивергенции в ортогональных криволинейных координатах, для которых предварительно найдены коэффициенты Ламе.

7.2. Примеры вычисления дивергенции (в криволинейных координатах)

Пример № 1

Требуется получить формулу:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\varphi) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\varphi), \qquad (\text{П.1.7.1})$$

где $\boldsymbol{a}$, φ — векторное и скалярное поля соответственно.

Решение

Опираясь на выражение дивергенции в декартовой системе координат (7.4), запишем:

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{a}\varphi\right) = \operatorname{div}\left(a_x\varphi\boldsymbol{i} + a_y\varphi\boldsymbol{j} + a_z\varphi\boldsymbol{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial a_x\varphi}{\partial x} + \frac{\partial a_y\varphi}{\partial y} + \frac{\partial a_z\varphi}{\partial z} =$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$= \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{a}, \operatorname{grad} \varphi \right),$$

т. е. получаем результат, аналогичный (П.1.7.1).

Пример № 2

Необходимо вычислить:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\boldsymbol{d} \frac{e^{ikr}}{r} \right), \qquad \text{(П.2.7.1)}$$

где $\boldsymbol{d}$ — постоянный вектор, r — переменная сферической системы координат. Результат вычисления находит применение при рассмотрении вопроса электромагнитного излучения системы заряженных частиц.

Решение

Согласно формуле (П.1.7.1) запишем:

$$\operatorname{div} \left(\boldsymbol{d} \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \left(\boldsymbol{d}, \operatorname{grad} \frac{e^{ikr}}{r} \right). \qquad \text{(П.2.7.2)}$$

Отметим, что $\operatorname{div} \boldsymbol{d} = 0$, так как вектор $\boldsymbol{d}$ по условию постоянный. Вычисление градиента проведём в сферической системе координат (ось z направим вдоль вектора $\boldsymbol{d}$):

$$\operatorname{grad} \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \boldsymbol{e}_r = \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} \boldsymbol{e}_r, \qquad \text{(П.2.7.3)}$$

и, подставив в предыдущее равенство, найдём:

$$\operatorname{div} \left(\boldsymbol{d} \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} \left(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}_r \right) =$$

$$= d \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} \cos \theta, \qquad \text{(П.2.7.4)}$$

где $d = |\boldsymbol{d}|$. Исходное выражение теперь примет вид:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\boldsymbol{d}\frac{e^{ikr}}{r}\right) = d\operatorname{grad}\left\{\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{ik}{r}\right)e^{ikr}\cos\theta\right\},$$

где θ — угол сферической системы координат, он же угол между векторами $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{e}_r$.

Вновь, пользуясь выражением градиента в сферических переменных, получим:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\boldsymbol{d}\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{ik}{r}\right)e^{ikr}d\cos\theta\boldsymbol{e}_r +$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{ik}{r}\right)e^{ikr}d\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta = \left(\frac{2}{r^2}-\frac{2ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right)e^{ikr}d\cos\theta\boldsymbol{e}_r +$$

$$+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{ik}{r^2}\right)e^{ikr}\left(-d\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta. \qquad (\text{П.2.7.5})$$

Запишем это выражение в инвариантном виде, т. е. в векторных обозначениях. Очевидно, что:

$$d\cos\theta = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}_r). \qquad (\text{П.2.7.6})$$

Что касается сомножителя $(-d\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta$, то, используя разложение:

$$\boldsymbol{d} = d\cos\theta\boldsymbol{e}_r - d\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta,$$

найдём, что:

$$-d\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{d} - d\cos\theta\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{d} - (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r. \qquad (\text{П.2.7.7})$$

Теперь, в силу соотношений (П.2.7.6) и (П.2.7.7) и собирая слагаемые при векторах $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{e}_r$, приведём выражение (П.2.7.5) к такой форме:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{d}\frac{e^{ikr}}{r}=\left(\frac{ik}{r^2}-\frac{1}{r^3}\right)e^{ikr}\boldsymbol{d}+$$

$$+\left(-\frac{k^2}{r}-\frac{3ik}{r^2}+\frac{3}{r^3}\right)e^{ikr}\left(\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}_r\right)\boldsymbol{e}_r. \qquad (\text{П.2.7.8})$$

Пример № 3

Важной и часто встречающейся дифференциальной операцией второго порядка является оператор Лапласа Δ, действие которого на скалярную функцию $u(\boldsymbol{r})$ определяется выражением:

$$\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u. \qquad (\text{П.3.7.1})$$

Необходимо найти явное выражение оператора Лапласа (лапласиана) в произвольной криволинейной ортогональной системе координат.

Решение

Для этого воспользуемся известным выражением градиента:

$$\operatorname{grad} u=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_3 \qquad (\text{П.3.7.2})$$

и выражением (7.3) для дивергенции векторного поля $\boldsymbol{a}$. Выбрав вектор градиента (П.3.7.2) в качестве поля $\boldsymbol{a}$ и подставив его составляющие в выражение (7.3), найдём общее выражение лапласиана в ортогональных криволинейных координатах:

$$\Delta u=\operatorname{div}\operatorname{grad} u=$$

$$=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\right)+\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q^3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\right)\right]. \qquad (\text{П.3.7.3})$$

В частности, в декартовых координатах будем иметь $H_1 = H_2 = H_3 = 1$; $q^1 = x$, $q^2 = y$, $q^3 = z$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \qquad \text{(П.3.7.4)}$$

Оператор Лапласа содержит производные второго порядка. Поэтому его, как и другие операторы, содержащие производные второго (и не выше) порядка, относят к дифференциальным операторам второго порядка.

Для отыскания вида лапласиана в цилиндрических координатах подставим в (П.3.7.3) коэффициенты Ламе $H_1 = H_\rho = 1$, $H_2 = H_\varphi = \rho$, $H_3 = H_z = 1$ и переменные цилиндрической системы ρ, φ, z. Таким образом, получим:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \qquad \text{(П.3.7.5)}$$

В результате подстановки $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_\theta = r$, $H_3 = H_\varphi = r\sin\theta$ и обозначений сферических переменных r, θ, φ в (П.3.7.3) получим вид лапласиана в этих переменных:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \qquad \text{(П.3.7.6)}$$

7.3. Интегральная теорема (формула) Остроградского—Гаусса

Как уже отмечалось, интегральная теорема Остроградского—Гаусса — теорема о преобразовании поверхностного интеграла в объёмный — играет важную роль в развитии математического аппарата макроскопической электродинамики. Сформулируем эту теорему, предполагая, что частные производные от координат $a_i(q^1, q^2, q^3)$ векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ являются **непрерывными** функциями в трёхмерной области V, ограниченной замкнутой поверхностью Σ.

Теорема Остроградского—Гаусса: *поток векторного поля через* ***замкнутую*** *поверхность равен объёмному интегралу от дивергенции векторного поля*:

$$\oint_{\Sigma}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,dS = \int_{V} \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dV. \tag{7.24}$$

Для доказательства теоремы разделим область V системой поверхностей на такие малые непересекающиеся объёмы ΔV_i, что:

$$\sum\nolimits_{\{i\}} \Delta V_i = V. \tag{7.25}$$

Для замкнутых поверхностей, ограничивающих малые объёмы ΔV_i, в каждом из которых произвольно выбрана точка P_i, введём обозначение Σ_i. Согласно определению (7.1), дивергенция поля в любой из точек P_i имеет вид:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}\Big|_{P_i} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\oint_{\Sigma_i}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,dS}{\Delta V_i}. \tag{7.26}$$

Равенство (7.26) по смыслу определения предела означает, что разность между пределом, которым и является дивергенция, и выражением, стоящим под знаком предела, является бесконечно малой величиной, т. е. принимает по абсолютной

величине сколь угодно малые значения α при достаточно малых ΔV_i. Для широкого класса полей можно считать, что для каждого α существует столь малый объём разбиения ΔV_α, что для всех $0 < \Delta V_i \leqslant \Delta V_\alpha$ равенство (7.26) можно переписать в эквивалентной форме в виде двойного неравенства:

$$-\alpha \leq \operatorname{div} \boldsymbol{a}\big|_{P_i} - \frac{\oint_{\Sigma_i} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\, dS}{\Delta V_i} \leq \alpha, \tag{7.27}$$

выполняющегося одновременно для всех точек P_i. Умножая все части неравенства (7.27) на ΔV_i, получим систему неравенств:

$$-\alpha \Delta V_i \leq \operatorname{div} \boldsymbol{a}\big|_{P_i} \Delta V_i - \oint_{\Sigma_i} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\, dS \leq \alpha \Delta V_i. \tag{7.28}$$

Складывая соответствующие части неравенств (7.28) и принимая во внимание равенство (7.25), приходим к совокупности неравенств:

$$-\alpha V \leq \sum\nolimits_i \operatorname{div} \boldsymbol{a}\big|_{P_i} \Delta V_i - \sum\nolimits_i \oint_{\Sigma_i} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\, dS \leq \alpha V. \tag{7.29}$$

Относительно суммы поверхностных интегралов, входящих в (7.29), можно утверждать, что она равна поверхностному интегралу по внешней поверхности Σ, ограничивающей объём V, т. е.:

$$\sum\nolimits_i \oint_{\Sigma_i} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\, dS = \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\, dS. \tag{7.30}$$

Это объясняется тем, что поверхностные интегралы по частям поверхностей Σ_i, не принадлежащим внешней поверхности Σ, взаимно компенсируют друг друга. Действительно, такие поверхности являются общей поверхностью соприкасающихся элементарных объёмов, при этом направления внешних нормалей на их общей поверхности прямо противоположны, в то время как значения полей равны. Поэтому скалярные произведения, а, следовательно, и потоки, вычис-

ленные на общей поверхности смежных элементов объёмов, равны по абсолютной величине и отличаются знаком, что и приводит к их взаимному сокращению. В результате вклад в сумму поверхностных интегралов вносят лишь части поверхностей Σ_i, принадлежащие внешней поверхности. Но так как объединение этих поверхностей есть вся внешняя поверхность, то и сумма потоков равна потоку через внешнюю поверхность, что и доказывает равенство (7.30).

Член αV в (7.29) является сколь угодно малой величиной в силу того, что объём V есть величина ограниченная (он ограничен замкнутой поверхностью), поэтому за счёт уменьшения α произведение αV можно сделать сколь угодно малым.

На основании (7.30), вводя обозначение $\alpha V = \varepsilon$, перепишем неравенство (7.29) в следующей форме:

$$-\varepsilon \le \sum\nolimits_i \operatorname{div} \boldsymbol{a}\big|_{P_i} \Delta V_i - \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS \le \varepsilon. \qquad (7.31)$$

Таким образом, для любого сколь угодно малого значения $\varepsilon < 0$ найдётся столь мелкое разбиение объёма ΔV_α, что выполняется двойное неравенство (7.31). Но это и означает, что переменная величина $\sum_i \operatorname{div} \boldsymbol{a}\big|_{P_i} \Delta V_i$ (она зависит от способа разбиения и выбора точек P_i) сколь угодно мало отличается от постоянного значения $\oint_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS$ (эта величина не зависит от разбиения объёма) при достаточно мелком разбиении объёма ΔV_α. Другими словами, величина $\oint_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS$ является пределом переменной величины $\sum_i \operatorname{div} \boldsymbol{a}\big|_{P_i} \Delta V_i$ и её можно записать так:

$$\lim_{\Delta V_\alpha \to 0} \sum\nolimits_i \operatorname{div} \boldsymbol{a}\big|_{P_i} \Delta V_i = \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS. \qquad (7.32)$$

Но левая часть приведённого равенства есть ни что иное, как предел интегральной суммы в определении объёмного интеграла от функции div $\boldsymbol{a}$ по объёму V, и потому:

$$\lim_{\Delta V_\alpha \to 0} \sum_i \operatorname{div} \boldsymbol{a}\Big|_{P_i} \Delta V_i = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} dV. \tag{7.33}$$

Из равенства левых частей формул (7.32) и (7.33) приходим к выводу о равенстве их правых частей:

$$\oint_\Sigma (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) dS = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} dV, \tag{7.34}$$

что и составляет содержание теоремы Остроградского—Гаусса (7.24).

§ 8. ИНВАРИАНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РОТОРА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА (ФОРМУЛА) СТОКСА

Определение ротора. Ротором векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ в точке P называется **вектор**, обозначаемый как $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\big|_P$, проекция которого на любое направление $\boldsymbol{n}$ равна пределу отношения циркуляции вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ по контуру L, ограничивающего плоскую площадку ΔS, перпендикулярную этому направлению и содержащую точку P, к площади ΔS, когда последняя стягивается в точку P.

Направление обхода замкнутого контура L предполагается согласованным с направлением нормали $\boldsymbol{n}$: обход контура совершается против хода часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{n}$, как показано на рисунке 18.

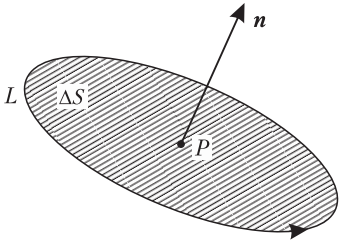

Рис. 18. Обозначения к определению ротора

Следуя данному определению, запишем математическое выражение для проекции ротора $\operatorname{rot}_n \boldsymbol{a}\big|_P$:

$$\operatorname{rot}_n \boldsymbol{a}\big|_P = \lim_{\Delta S \to P} \frac{\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})}{\Delta S}. \qquad (8.1)$$

Так как скалярное произведение (следовательно, и циркуляция) и площадь ΔS не зависят от выбора системы координат, то и проекция ротора на любое направление обладает отмеченным свойством. Таким образом, данное определение ротора является его инвариантным определением, т. е. не зависящим от системы координат, в которой он вычисляется.

Происхождение названия ротора (англ. *rotation* — вращение), как и его физическое истолкование, проследим на примере вычисления ротора векторного поля линейных скоростей $\boldsymbol{v}$ твёрдого тела, вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$вокруг оси z:

$$\operatorname{rot}_n \boldsymbol{v}\big|_P = \lim_{\Delta S \to P} \frac{\oint_L (\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{r})}{\Delta S}. \qquad (8.2)$$

Выберем для начала точку P на **оси вращения** и найдём величину проекции ротора в этой точке на ось z. Круговой контур L, а также площадка ΔS, перпендикулярная оси z и содержащая точку P, показаны на рисунке 19. Имея ввиду цилиндрическую систему координат, вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}$ любой точки твёрдого тела, находящейся на расстоянии ρ от оси вращения и, следовательно, движущейся по окружности, можно представить в виде:

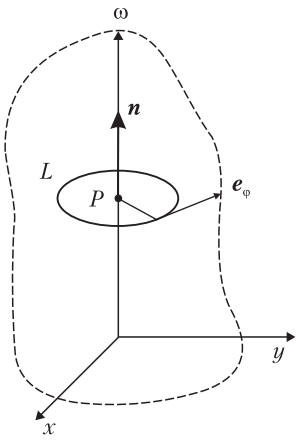

Рис. 19. Пояснения обозначений к формуле (8.2)

$$\boldsymbol{v} = \omega\rho\boldsymbol{e}_\varphi. \qquad (8.3)$$

Здесь учтено, что вектор $\boldsymbol{v}$, как и базисный вектор $\boldsymbol{e}_\varphi$, касательные к окружности (в одной и той же точке окружности). Выражение (8.3) и есть векторное поле скоростей, ротор которого требуется определить. Дифференциал перемещения вдоль окружности определяется выражением $d\boldsymbol{r} = \rho d\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$, и скалярное произведение в числителе (8.2) оказывается равным:

$$(\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{r}) = \omega\rho^2 d\varphi. \qquad (8.4)$$

Используя (8.4), сведём криволинейный интеграл в (8.2) к определённому, так что в итоге получим:

$$\oint_L (\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{r}) = \int_0^{2\pi} \omega\rho^2 d\varphi = 2\pi\omega\rho^2. \qquad (8.5)$$

Наконец, подставим значение циркуляции (8.5) и площади $\Delta S = \pi\rho^2$ в (8.2). В результате найдём величину проекции ротора поля скоростей на ось z (направление $\boldsymbol{n}$ совпадает с направлением оси z):

$$\operatorname{rot}_z \boldsymbol{v}\Big|_P = \lim_{\Delta S \to P} \frac{\oint_L (\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{r})}{\Delta S} = \lim_{\rho \to 0} \frac{2\pi\omega\rho^2}{\pi\rho^2} = 2\omega. \qquad (8.6)$$

Путём выбора площадок, содержащих точку P и перпендикулярных соответственно осям x и y, можно убедиться в равенстве нулю соответствующих им циркуляций, а, следовательно, и в справедливости равенств:

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{v}\Big|_P = \operatorname{rot}_y \boldsymbol{v}\Big|_P = 0. \qquad (8.7)$$

Равенства (8.6) и (8.7) можно записать в виде одного векторного соотношения:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\Big|_P = 2\boldsymbol{\omega}, \qquad (8.8)$$

где воспользуемся понятием вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Вычисление ротора на основе инвариантного определения в точках, не лежащих на оси вращения, также возможно соответствующим выбором малых площадок. При этом результат вычислений ротора окажется равным (8.7), т. е. не зависящим от положения точки P. Таким образом rot $\boldsymbol{v}$ в данном примере представляет удвоенный вектор угловой скорости вращения твёрдого тела, что и послужило основанием введения термина ротор.

Инвариантное определение ротора будет использовано при доказательстве теоремы Стокса:

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_{\Sigma_L} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, d\boldsymbol{S}), \qquad (8.9)$$

осуществляющей преобразование криволинейного интеграла по замкнутому контуру к поверхностному. Однако использование этого определения для вычисления ротора в конкретных задачах весьма затруднительно. Поэтому, как и в случае вычисления дивергенции, рассмотрим в следующем пункте 8.1 вывод дифференциального выражения ротора, существенно упрощающим его вычисление.

8.1. Дифференциальное выражение ротора векторного поля

Рассмотрим вывод дифференциальноого выражения для ротора в произвольной криволинейной ортогональной системе координат. Обратимся к исходному определению проекции ротора (8.1) и выберем в качестве вектора нормали $\boldsymbol{n}$ базисный вектор $\boldsymbol{e}_1$, начало которого находится в точке P (рис. 20).

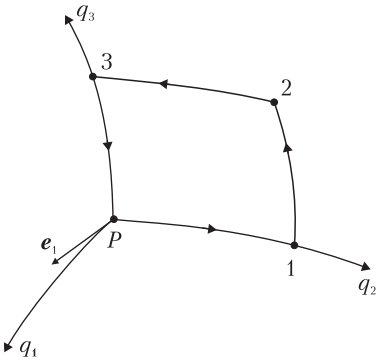

Рис. 20. Пояснения обозначений к формуле (8.10)

Элемент площади ΔS_1, ограниченный замкнутым контуром $P123$, принадлежит поверхности уровня $q_1 = \text{Const}$., и, следовательно, перпендикулярен выбранному направлению. Имея ввиду отмеченное на замкнутом контуре направление обхода, выражение для проекции ротора на направление $\boldsymbol{e}_1$ примет вид:

$$\operatorname{rot}_1 \boldsymbol{a}\Big|_P = \lim_{\Delta S_1 \to P} \frac{\oint_{P123P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})}{\Delta S_1}. \qquad (8.10)$$

Площадь ΔS_1 бесконечно малого криволинейного прямоугольника, ограниченного контуром $P123$, вычисляется по известной формуле (6.18):

$$\Delta S_1 = H_2 H_3 dq^2 dq^3. \qquad (8.11)$$

Интеграл в числителе выражения (8.10) представим в виде суммы четырёх интегралов по границам контура интегрирования:

$$\oint_{P123P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \oint_{P1} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \oint_{12} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \oint_{23} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \oint_{3P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}). \qquad (8.12)$$

Так как:

$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3,$$

а вектор перемещения $d\boldsymbol{r}$ вдоль границы $P1$ равен $H_2 dq^2 \boldsymbol{e}_2$, то $(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = a_2 H_2 dq^2$. В силу малости dq^2, первый интеграл в правой части (8.12) определяется величиной:

$$\oint_{P1} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = a_2 H_2 \Big|_{q^1, q^2, q^3} dq^2, \qquad (8.13)$$

вычисленной в точке с координатами q^1, q^2, q^3. Интеграл $\oint_{23} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, взятый по границе, противоположной $P1$, отличается, во-первых, знаком от (8.13) в силу противоположного направления обхода, во-вторых, тем, что координата q^3 имеет другое значение, равное $q^3 + dq^3$, в то время как координаты q^1, q^2 те же, что и в интеграле $\oint_{P1} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, поэтому:

$$\oint_{23} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -a_2 H_2 \Big|_{q^1, q^2, q^3 + dq^3} dq^2. \qquad (8.14)$$

Сумму интегралов (8.13) и (8.14) приведём к виду:

$$\oint_{P1} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \oint_{23} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -\left(a_2 H_2 \Big|_{q^1, q^2, q^3 + dq^3} - a_2 H_2 \Big|_{q^1, q^2, q^3} \right) dq^2. \qquad (8.15)$$

Выражение в скобках правой части (8.15) есть частное приращение функции $a_2 H_2$ по переменной q^3, поэтому:

$$a_2 H_2 \Big|_{q^1, q^2, q^3 + dq^3} - a_2 H_2 \Big|_{q^1, q^2, q^3} = \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q^3} dq^3. \qquad (8.16)$$

Из последних двух соотношений следует, что:

$$\oint_{P1}(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})+\oint_{23}(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})=-\frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q^3}dq^2dq^3. \qquad (8.17)$$

Аналогичные рассуждения в отношении второго и четвёртого интегралов в (8.12) приводят к следующему результату:

$$\oint_{12}(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})+\oint_{3P}(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})=\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q^2}dq^2dq^3. \qquad (8.18)$$

Наконец, интеграл в числителе (8.10) определяется суммой (8.17) и (8.18):

$$\oint_{P123P}(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})=\left[\frac{\partial a_3H_3}{\partial q^2}-\frac{\partial a_2H_2}{\partial q^3}\right]dq^2dq^3. \qquad (8.19)$$

После деления этого выражения на (8.11) получим искомое дифференциальное выражение для составляющей ротора на направление базисного вектора $\boldsymbol{e}_1$:

$$\mathrm{rot}_1\,\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial a_3H_3}{\partial q^2}-\frac{\partial a_2H_2}{\partial q^3}\right]. \qquad (8.20)$$

Осуществляя циклическую перестановку индексов, найдём остальные составляющие:

$$\mathrm{rot}_2\,\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial a_1H_1}{\partial q^3}-\frac{\partial a_3H_3}{\partial q^1}\right], \qquad (8.21)$$

$$\mathrm{rot}_3\,\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial a_2H_2}{\partial q^1}-\frac{\partial a_1H_1}{\partial q^2}\right], \qquad (8.22)$$

что совпадает с выражениями, следующими из раскрытия формального определителя:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{H_2H_3}\boldsymbol{e}_1 & \dfrac{1}{H_3H_1}\boldsymbol{e}_2 & \dfrac{1}{H_1H_2}\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1H_1 & a_2H_2 & a_3H_3 \end{vmatrix}. \qquad (8.23)$$

Это выражение ротора имеет легко запоминающуюся структуру и применяется для целей его вычисления в криволинейных ортогональных координатах.

8.2. Интегральная теорема (формула) Стокса

Важнейшей теоремой, использующей понятие ротора и осуществляющей преобразование циркуляции векторного поля в поверхностный интеграл второго типа, служит теорема Стокса.

Пусть кривая L есть граница поверхности Σ_L. В предположении, что ротор является непрерывной векторной функцией на поверхности Σ_L, имеет место утверждение: циркуляция векторного поля по *замкнутому* контуру (т. е. криволинейный интеграл второго типа по замкнутому контуру) равна потоку ротора через поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\oint_L \left(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}\right)=\int_{\Sigma_L}\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{S}\right)=\int_{\Sigma_L}\operatorname{rot}_n \boldsymbol{a}dS, \qquad (8.24)$$

что и составляет содержание теоремы Стокса. Необходимо подчеркнуть, что направление обхода контура L в интеграле справа и направление нормали $\boldsymbol{n}$ в точках поверхности Σ_L согласованы — обход контура совершается против хода часовой стрелки, если наблюдать движение из конца вектора нормали.

Для доказательства теоремы разделим поверхность Σ_L на элементы поверхности $\Delta\boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{n}\Delta S_k$, площадь которых в дальнейшем устремим к нулю. Определение проекции ротора (8.1)

означает, что для любого $\varepsilon < 0$ найдётся столь малая площадка ΔS, для которой выражение под знаком предела отличается по модулю от $\mathrm{rot}_n \boldsymbol{a}\big|_P$ меньше, чем на ε:

$$\left| \frac{\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})}{\Delta S} - \mathrm{rot}_n \boldsymbol{a}\big|_P \right| < \varepsilon.$$

После умножения на $\Delta S < 0$ запишем его в следующей эквивалентной форме:

$$-\varepsilon \Delta S < \oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) - \mathrm{rot}_n \boldsymbol{a}\big|_P \Delta S < \varepsilon \Delta S. \qquad (8.25)$$

В силу *непрерывности* векторной функции ротора на *замкнутой* поверхности для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая малая величина диаметра d разбиения поверхности Σ_L, что одновременно для всей совокупности элементов разбиения ΔS_k, таких что их диаметры $d_k \leqslant d$ и $\Sigma_k \Delta S_k = S$, выполняются неравенства (8.25) в применении к каждому элементу разбиения ΔS_k, ограниченному замкнутым контуром L_k:

$$-\varepsilon \Delta S_k < \oint_{L_k} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) - \mathrm{rot}_n \boldsymbol{a}\big|_{P_k} \Delta S_k < \varepsilon \Delta S_k.$$

Теперь сложим все эти неравенства и учтём, что сумма интегралов по контурам L_k в точности сводится к интегралу по границе L всей поверхности Σ_L, так как интегралы по всем остальным элементам границ L_k попарно уничтожаются, а сумма ΔS_k равна площади S всей поверхности:

$$-\varepsilon S < \oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) - \sum\nolimits_k \mathrm{rot}_n \boldsymbol{a}\big|_{P_k} \Delta S_k < \varepsilon S. \qquad (8.26)$$

Величина $\varepsilon' = \varepsilon S$, в силу конечного значения S, может быть выбрана сколь угодно малой за счёт малости ε. Следовательно, неравенство (8.26) означает, что для любого $\varepsilon' < 0$

существует такое разбиение поверхности на элементы ΔS_k с достаточно малыми диаметрами d_k, что справедливо неравенство:

$$\left| \oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) - \sum_k \operatorname{rot}_n \boldsymbol{a} \Big|_{P_k} \Delta S_k \right| < \varepsilon'.$$

В свою очередь это неравенство, согласно определению предела, и означает, что предел переменной величины $\sum_k \operatorname{rot}_n \boldsymbol{a} \Big|_{P_k} \Delta S_k$ (зависящей от способа разбиения и выбора точек P_k) равен постоянной величине $\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$ (не зависящей от способа разбиения и выбора точек P_k) при стремлении максимального диаметра элементов ΔS_k к нулю:

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum_k \operatorname{rot}_n \boldsymbol{a} \Big|_{P_k} \Delta S_k = \oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}). \tag{8.27}$$

Величина в левой части этого равенства есть ничто иное, как предел интегральной суммы в определении поверхностного интеграла второго рода. Следовательно:

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum_k \operatorname{rot}_n \boldsymbol{a} \Big|_{P_k} \Delta S_k = \int_{\Sigma_L} \operatorname{rot}_n \boldsymbol{a} dS. \tag{8.28}$$

Из сопоставления равенств (8.27) и (8.28) делаем заключение о равенстве их правых частей:

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_{\Sigma_L} \operatorname{rot}_n \boldsymbol{a} dS, \tag{8.29}$$

что и составляет содержание теоремы Стокса.

8.3. Примеры с использованием дифференциальных операторов

Пример № 1

Докажите, что:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = 0. \qquad \text{(П.1.8.1)}$$

Решение

Докажем это равенство, воспользовавшись теоремами Остроградского—Гаусса и Стокса. С этой целью в соотношении (7.24), выражающем теорему Остроградского—Гаусса, в качестве векторного поля $\boldsymbol{a}$ выберем $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$. В таком случае придём к равенству:

$$\int_V \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}dV = \oint_\Sigma \operatorname{rot}_n \boldsymbol{A}dS. \qquad \text{(П.1.8.2)}$$

Интеграл в левой стороне (П.1.8.2) преобразуем, воспользовавшись теоремой Стокса:

$$\oint_\Sigma \operatorname{rot}_n \boldsymbol{A}dS = \oint_L \left(\boldsymbol{A}, d\boldsymbol{r}\right) = 0. \qquad \text{(П.1.8.3)}$$

Равенство нулю криволинейного интеграла обусловлено вырождением замкнутого контура L в точку (ведь поверхность Σ замкнутая!). Следовательно, справедливо равенство:

$$\int_V \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}dV = 0, \qquad \text{(П.1.8.4)}$$

причём для любого объёма V. Отсюда делаем вывод о тождественном обращении в нуль подынтегрального выражения в (П.1.8.4), что и доказывает формулу (П.1.8.1).

Введём следующее определение. Векторное поле $\boldsymbol{a}$ называется *соленоидальным*, если во всех точках дивергенция поля равна нулю:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0. \qquad \text{(П.1.8.5)}$$

1. Из определения соленоидального поля и теоремы Остроградского—Гаусса сразу же следует, что поток этого векторного поля через замкнутую поверхность равен нулю. Действительно, применяя теорему (7.34) и при условии (П.1.8.5), получаем:

$$\oint_{\Sigma}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})dS=\int_{V}\operatorname{div}\boldsymbol{a}dV=0.$$

Векторное поле $\boldsymbol{a}$, представимое в виде $\boldsymbol{a}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, в силу свойства (П.1.8.1), является соленоидальным.

2. Имеет место обратное утверждение: соленоидальное поле представляется как ротор некоторого поля $\boldsymbol{A}$. Таким образом, если:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0,$$

то существует такое поле $\boldsymbol{A}$, что:

$$\boldsymbol{a}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \qquad (П.1.8.6)$$

Этот утверждение широко используется в разделе электродинамики.

Для доказательства представления соленоидального векторного поля в форме (П.1.8.5) выберем декартову прямоугольную систему координат и покажем, что поле $\boldsymbol{A}$ можно найти в виде:

$$A_x(x,y,z),\quad A_y(x,y,z),\quad A_z(x,y,z)=0. \qquad (П.1.8.7)$$

Полагая поле вектора $\boldsymbol{a}$ заданным, из (П.1.8.6) найдём уравнения, которым должны удовлетворять функции (П.1.8.7):

$$-\frac{\partial A_y}{\partial z}=a_x,\qquad \frac{\partial A_x}{\partial z}=a_y,\qquad \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=a_z. \qquad (П.1.8.8)$$

Интегрируя первые два уравнения по z, найдём их общие решения:

$$A_y = -\int_{z_0}^{z} a_x\left(x,y,z\right)dz + f\left(x,y\right), \qquad \text{(П.1.8.9)}$$

$$A_x = \int_{z_0}^{z} a_y\left(x,y,z\right)dz + g\left(x,y\right), \qquad \text{(П.1.8.10)}$$

где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — функции, требующие своего определения. Подставим теперь выражения (П.1.8.9) и (П.1.8.10) в третье уравнение (П.1.8.8). В результате получим:

$$-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial a_x}{\partial x}dz + \frac{\partial f}{\partial x} - \int_{z_0}^{z}\frac{\partial a_y}{\partial y}dz - \frac{\partial g}{\partial y} =$$

$$= -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)dz + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a_z. \qquad \text{(П.1.8.11)}$$

Примем теперь во внимание условие соленоидальности (П.1.8.5):

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0.$$

Заменяя в (П.1.8.11) комбинацию $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}$ на $\left(-\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$, приведём его к виду:

$$\int_{z_0}^{z}\frac{\partial a_z}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a_z\left(x,y,z\right).$$

Интегрируя по z, получаем:

$$a_z\left(x,y,z\right) - a_z\left(x,y,z_0\right) + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a_z\left(x,y,z\right),$$

или:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a_z\left(x,y,z_0\right).$$

Это уравнение будет удовлетворено, если положить, что $g(x, y) = 0$, а в качестве f взять решение этого уравнения:

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x} a_z(x,y,z_0)\,dx$$

при $g = 0$. Итак, если взять:

$$A_x=\int_{z_0}^{z} a_y(x,y,z)\,dz,$$
$$A_y=-\int_{z_0}^{z} a_x(x,y,z)\,dz+\int_{x_0}^{x} a_z(x,y,z_0)\,dx, \qquad \text{(П.1.8.12)}$$
$$A_z=0,$$

то равенство (П.1.8.6) будет выполнено, что и требовалось доказать.

Пример № 2

Докажите, что:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0. \qquad \text{(П.2.8.1)}$$

Воспользуемся теоремой Стокса, положив в (8.24) $\boldsymbol{a}$ = = grad φ:

$$\int_{\Sigma_L}(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi, d\boldsymbol{S})=\oint_L(\operatorname{grad}\varphi, d\boldsymbol{r}). \qquad \text{(П.2.8.2)}$$

Скалярное произведение в правой стороне этого равенства равно дифференциалу $d\varphi$ (4.42) скалярного поля φ:

$$(\operatorname{grad}\varphi, d\boldsymbol{r})=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=d\varphi. \qquad \text{(П.2.8.3)}$$

Поэтому интеграл по замкнутому контуру равен нулю (поле φ предполагается однозначной функцией):

$$\oint_L(\operatorname{grad}\varphi, d\boldsymbol{r})=\oint_L d\varphi=0. \qquad \text{(П.2.8.4)}$$

В таком случае, как это следует из (П.2.8.2), можно утверждать, что интеграл:

$$\int_{\Sigma_L} \left(\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi, d\boldsymbol{S} \right) = 0. \qquad \text{(П.2.8.5)}$$

Так как равенство (П.2.8.5) имеет место для любой поверхности Σ_L, то необходимо:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0, \qquad \text{(П.2.8.6)}$$

что и требовалось установить.

Векторное поле $\boldsymbol{a}$ называется *потенциальным* (или *безвихревым*, или *градиентным*), если во всех точках поля выполняется равенство:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0. \qquad \text{(П.2.8.7)}$$

В смысле данного определения равенство (П.2.8.1) означает, что векторное поле, представимое в виде $\operatorname{grad} \varphi$, есть поле потенциальное.

Докажем обратное утверждение: если выполняется равенство (П.2.8.7), т. е. поле $\boldsymbol{a}$ является потенциальным, то существует такое скалярное поле φ, что:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \varphi. \qquad \text{(П.2.8.8)}$$

Пусть Σ_L — любая односвязная поверхность (т. е. не содержащая отверстий) и L — ограничивающий её замкнутый контур. Для доказательства воспользуемся равенством, выражающим теорему Стокса (8.24):

$$\oint_L \left(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r} \right) = \int_{\Sigma_L} \left(\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, d\boldsymbol{S} \right), \qquad \text{(П.2.8.9)}$$

из которого, в силу условия (П.2.8.7), заключаем, что для любого замкнутого контура L имеет место равенство:

$$\oint_L \left(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r} \right) = 0. \qquad \text{(П.2.8.10)}$$

На основании этого равенства докажем, что криволинейный интеграл:

$$\oint_{L_{P_0P}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}), \qquad (\text{П.2.8.11})$$

взятый вдоль кривой L_{P_0P}, началом которой служит точка P_0, а концом точка P, зависит лишь от координат начальной и конечной точек и не зависит от формы кривой L, их соединяющей. С этой целью выберем на замкнутом контуре L две точки P_0 и P (рис. 21).

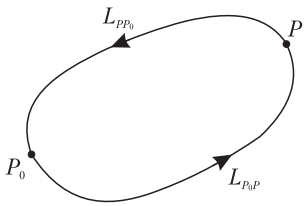

Рис. 21. К доказательству независимости криволинейного интеграла второго типа от формы кривой интегрирования

Обход по замкнутому контуру L представим в виде движения вдоль кривой L_{P_0P} с началом в точке P_0 и кривой L_{PP_0}, началом которой служит точка P, так что:

$$L = L_{P_0P} + L_{PP_0}.$$

Интеграл (П.2.8.10) представим теперь в виде суммы двух интегралов по кривым L_{P_0P} и L_{PP_0}:

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_{L_{P_0P}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \int_{L_{PP_0}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}). \qquad (\text{П.2.8.12})$$

Криволинейный интеграл второго типа зависит от направления движения по кривой интегрирования и при смене направления движения меняет знак на противоположный. Отсюда следует, что:

$$\int_{L_{PP_0}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -\int_{\tilde{L}_{P_0P}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}), \qquad (\text{П.2.8.13})$$

где $\tilde{L}_{P_0P}$ та же по форме кривая L_{PP_0}, но с противоположным направлением обхода. На основании этого равенства соотношению (П.2.8.12) придадим вид:

$$\int_{L_{P_0P}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) - \int_{\tilde{L}_{P_0P}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = 0,$$

или

$$\int_{L_{P_0P}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_{\tilde{L}_{P_0P}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}), \qquad (\text{П.2.8.14})$$

где L_{P_0P} и $\tilde{L}_{P_0P}$ различные кривые, имеющие общие начальные и конечные точки.

Установленное равенство означает, что если $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0$ равен нулю в односвязной области D и выполнены условия применимости теоремы Стокса, то интеграл (П.2.8.11) не зависит от формы кривой, соединяющей точки P_0 и P.

Итак, при фиксированном положении точки P_0 интеграл $\oint_{L_{P_0P}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$ зависит только координат точки точки P, что даёт возможность рассматривать его как некоторую однозначную функцию $\varphi(x, y, z)$ переменных, определяющих положение этой точки:

$$\varphi(x, y, z) = \int_{L_{P_0P}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}). \qquad (\text{П.2.8.15})$$

Символ $\forall L_{P_0P}$ означает, что при вычислении функции φ может быть выбрана любая кривая интегрирования (в конкретных задачах она выбирается из соображений упрощения интегрирования).

Покажем теперь, что из равенства (П.2.8.15) следует формула (П.2.8.8). Приращение функции $\varphi(x, y, z)$ при переходе из точки x, y, z в точку $x + \Delta x, y, z$ равно частному приращению $\Delta_x\varphi$ и выражается, согласно (П.2.8.15), интегралом следующего вида:

$$\Delta_x\varphi = \varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = \int_x^{x+\Delta x} a_x dx. \qquad (\text{П.2.8.16})$$

При вычислении кривая интегрирования выбрана параллельно оси x (из соображений удобства вычислений). В этом случае $(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = a_x dx$ и криволинейный интеграл сразу

сводится к определённому интегралу в пределах от x до $x + \Delta x$. Интеграл в (П.2.8.16) вычисляем, воспользовавшись теоремой о среднем:

$$\Delta_x \varphi = a_x\left(x + \theta\Delta x\right)\Delta x \qquad \left(0 < \theta < 1\right).$$

После деления на Δx и перехода к пределу получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x \varphi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a_x\left(x + \theta\Delta x\right),$$

из которого, в соответствии с определением частной производной $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x \varphi}{\Delta x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ и свойством непрерывности поля $\boldsymbol{a}$ $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} a_x\left(x + \theta\Delta x\right) = a_x\left(x\right)\right)$, следует равенство:

$$a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \qquad \text{(П.2.8.17)}$$

Подобным образом устанавливаются выражения для остальных составляющих поля $\boldsymbol{a}$: $a_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, $a_z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$. Итак, при выполнении условия $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$ доказано существование скалярной функции φ такой, что поле $\boldsymbol{a}$ является её градиентом (П.2.8.8):

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Пример № 3

Докажите, что:

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\right) = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \boldsymbol{a}\right) - \Delta \boldsymbol{a}. \qquad \text{(П.3.8.1)}$$

Докажем эту формулу, воспользовавшись записью дифференциальных операций в декартовой системе координат. Начнём с вычисления составляющей вектора rot (rot $\boldsymbol{a}$) в направлении оси x. В формуле (8.20) индекс 1 заменим на x,

коэффициенты Ламе положим равными единице и введём обозначения $q^2 = y$, $q^3 = z$. В итоге запишем:

$$\operatorname{rot}_x\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\right)=\frac{\partial \operatorname{rot}_z \boldsymbol{a}}{\partial y}-\frac{\partial \operatorname{rot}_y \boldsymbol{a}}{\partial z}. \qquad \text{(П.3.8.2)}$$

Вновь расписывая составляющие $\operatorname{rot}_y \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot}_z \boldsymbol{a}$ по формулам (8.21) и (8.22) с очевидными переобозначениями, преобразуем (П.3.8.2) в:

$$\operatorname{rot}_x\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right).$$

Прибавим по $\dfrac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}$ в каждой круглой скобке, что даёт:

$$\operatorname{rot}_x\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\right)=\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\Delta a_x. \qquad \text{(П.3.8.3)}$$

Аналогичные выражения получаются и для проекций на оси y, z:

$$\operatorname{rot}_y\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\Delta a_y,$$

$$\operatorname{rot}_z\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\Delta a_z. \qquad \text{(П.3.8.4)}$$

Умножая три последних равенства на базисные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ соответственно и складывая, получим формулу (П.3.8.1):

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\right)=\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{a}\right)-\Delta\boldsymbol{a}. \qquad \text{(П.3.8.5)}$$

И здесь отметим важную роль этой формулы в электродинамике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в пособии материал представляет собой начальный объём знаний из направления в математике, которое принято называть тензорным анализом (частным вариантом которого является анализ скалярных и векторных полей) или современной геометрией. Тем не менее объёма освоенных здесь знаний вполне достаточно для дальнейшего самостоятельного, более широкого изучения обсуждаемого направления математики. С этой целью можно рекомендовать монографию Н.Е. Кочина «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления», в которую, помимо собственно теоретической части дисциплины, включено рассмотрение большого количества прикладных задач.

При формировании содержания пособия автор в значительной мере руководствовался задачей обеспечения обучающихся необходимым математическим аппаратом для последующего изучения различных разделов физики. В частности, усвоенных в предлагаемом объёме знаний вполне достаточно для понимания математического содержания основных электродинамических уравнений Максвелла в *интегральной* формулировке:

$$\oint_L (\boldsymbol{E}, d\boldsymbol{r}) = -\frac{d}{dt}\int_{\Sigma_L} (\boldsymbol{B}, d\boldsymbol{S}), \qquad \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{B}, d\boldsymbol{S}) = 0; \quad (1)$$

$$\oint_L (\boldsymbol{H}, d\boldsymbol{r}) = \frac{d}{dt}\int_{\Sigma_L} (\boldsymbol{D}, d\boldsymbol{S}) + \int_{\Sigma_L} (\boldsymbol{j}, d\boldsymbol{S}), \qquad \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{D}, d\boldsymbol{S}) = q, \quad (2)$$

в которых присутствуют криволинейные интегралы второго рода по любой замкнутой траектории L (в физике его принято называть циркуляцией векторного поля) и поверхностные интегралы второго рода по поверхности Σ_L, имеющей своей границей контур L, или по замкнутой поверхности Σ (т. е. потоки векторного поля).

Значение интегральных теорем Остроградского—Гаусса и Стокса очевидным образом проявляется в процессе перехода

от интегральной формы уравнений электродинамики (1), (2) к *дифференциальной* формулировке уравнений электродинамики Максвелла:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0; \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho. \tag{4}$$

Переход к этим уравнениям допустим в областях пространства, где соблюдаются условия справедливости отмеченных теорем. В областях, где эти условия не соблюдаются, уравнения (3), (4) принимают форму записи граничных условий (их вид не приводим). Свойства дифференциальных операторов, как и форма их записи в криволинейных координатах, являлись темами особого внимания в силу их практической значимости при решении конкретных задач.

Отметим также, что практически во всех теориях естественнонаучного характера (теория упругости, гидра-газодинамика, термодинамика необратимых процессов и т. д.) в той или иной мере используется математический аппарат тензорного анализа (или его части в форме теории скалярного и векторного полей).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- *Бермант А. Ф.* Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина: 2-е изд. Москва, 2020.
- *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва, 1965.
- *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс: 11-е изд. Москва, 2013.
- *Потапов А. П.* Математический анализ. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Москва, 2019.

Для заметок

Для заметок

Учебное издание

Автор:

Акимов Владимир Николаевич

ТЕОРИЯ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Учебное пособие

Редактор, оформление Г.В. Нестерова
Корректор Е.Н. Королева
Художественный редактор Т.В. Нестерова

Подписано в печать 04.03.2025.
Формат 60×90$^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 12,75. Тираж 150 экз. Заказ № 11-25.

Отпечатано в ФГАОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова
Минздрава России (Пироговский Университет)
117513, Москва, ул. Островитянова, 1
www.rsmu.ru

ISBN 978-5-88458-735-9



9 785884 587359 >