Министерство здравоохранения РФ

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

Российский национальный исследовательский

медицинский университет им. Н.И. Пирогова

Кафедра физики и математики

педиатрического факультета

Л.В. Янцер

Элементы математического анализа

Методическое пособие

МОСКВА, 2016

Автор - Л.В. Янцер

Кафедра физики и математики п/ф РНИМУ им.Н.И. Пирогова

Элементы математического анализа.- Л.В. Янцер.- Методическое пособие.- М.:ГБОУ ВПО РНИМУ им. Н.И.Пирогова, 2016.- 27с.

Методическое пособие «Элементы математического анализа» предназначено для преподавателей. Пособие содержит следующие разделы: функции и их свойства, элементы дифференциального исчисления, элементы интегрального исчисления, дифференциальные уравнения. Изложение теоретического материала сопровождается примерами и задачами прикладного характера.

СОДЕРЖАНИЕ:

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы математического анализа широко используются в естественных науках для точной формулировки их содержания. Без знаний азов математического анализа нельзя грамотно прочитать кардиограмму, без применения интеграла невозможно изучение гемодинамики-движения крови по сосудам. Дифференциальные уравнения устанавливают связь между переменными величинами, характеризующими процессы физического, химического, медико-биологического, фармацевтического содержания.

1. Введение в математический анализ

При изучении различных процессов и явлений - биологических, физических, химических - приходится иметь дело с величинами, связанными между собой зависимостью того или иного вида. Например, скорость химической реакции – от температуры, давление газа – от его объема, температуры, плотности, скорости размножения бактерий - от условий окружающей среды, которые могут быть описаны некоторыми величинами.

Одним из важнейших видов зависимости между величинами является функциональная зависимость.

1.1Функции и их свойства.

Совокупность числовых значений переменной величины ***называется областью изменения этой величины.***

Если переменная величина изменяется непрерывно, то областью ее изменения является промежутком.

Выделяют три типа промежутков:

1) отрезок (сегмент) – замкнутый промежуток

[a ;b], axb;

2)полуинтервал полуоткрытый промежуток

[a;b), axb;

3)интервал – открытый промежуток

(a; b) , axb.

Если каждому значению переменной величины х, принадлежащему некоторой области ее изменения, соответствует одно определенное значение другой переменной величины у, ***то у называется функцией от переменной х.*** *Переменная х называется* ***независимой переменной или аргументом.***

$$\mathbf{y=f(x);\ y=F(x).}$$

В математическом анализе рассматриваются три способа задания функции.

1.*Аналитический* - осуществляется с помощью формул.

$$y=x^2;\ y=\sin x \text{ и т.д.}$$

2.*Табличный* – задается парами значений аргумента и функции в виде таблицы.

3.*Графический* – состоит в представлении функции в виде графика. График функции $y=f(x)$ – это множество точек плоскости, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению $y=f(x)$.

Множество всех допустимых значений аргумента называют *областью определения функции****, а множество всех соответствующих значений функции -*** *ее областью значений.*

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей на интервале (a;b), *если для любых двух значений x_1 и x_2 , принадлежащих этому интервалу и удовлетворяющих неравенству x_2 x_1 , выполняется неравенство $f(x_2)$ $f(x_1)$,* ***и убывающей,*** *если при этих же условиях выполняется неравенство $f(x_2)$ $f(x_1)$.*

Если функция во всей области своего определения только возрастает или только убывает, ***то она называется монотонной.***

Функция $f(x)$ называется четной, *если для всех значений х, принадлежащих области определения функции, выполняется равенство$f(-x)=f(x)$.*

Функция f(x) называется нечетной, *если для всех значений x, принадлежащих области определения функции, выполняется равенство f(-x)=-f(x).*

Функция f(x) называется периодической с периодом T, *если для всех значений x, принадлежащих области определения функции, выполняется равенство f(x-T)=f(x)=f(x+T).*

1.2.Простейшие функции.

1.Линейная функция.

Линейной функциональной зависимостью между величинами называется зависимость вида **: y=кx+b,**

где, параметры **к и b**- действительные числа, причем к0.

к- угловой коэффициент, равен тангенсу угла наклона графика функции к ох.

Область определения – множество всех действительных чисел.

Область значения – множество всех действительных чисел.

При к0 функция неограниченно возрастает, при к0- неограниченно убывает.

График линейной функции - прямая линия, расположение и ориентация которой определяются значениями параметров к и b.

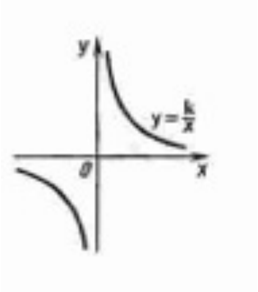
2. Обратная пропорциональная зависимость.

Обратной пропорциональной зависимостью называется зависимость вида : **y = ,**

где, параметр к - действительное число, причем к0.

Область определения - множество всех действительных чисел.

Обратная пропорциональная зависимость - нечетная функция.



3.Степенная функция.

Степенной функцией называется функция вида:

$$y = x^n,$$

где n-целое число.

Если n0, то областью определения степенной функции является множество всех действительных чисел, если n0-все действительные числа, кроме 0.

4.Квадратичная функция.

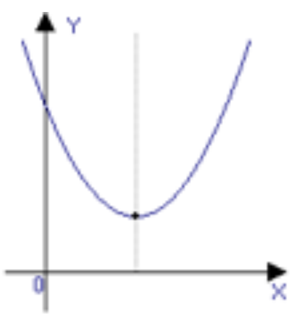
Квадратичной функцией называется функция вида:

$$y=ax^2+bx+c,$$

где, параметры a,b, c - действительные числа, причем a0.

Область определения - множество всех действительных чисел.

График квадратичной функции - парабола, ориентация и расположение которой определяются значениями параметров функции.



5.Показательная функция.

Показательной функцией называется функция вида:

$$y=a^x,$$

где ,основание a - положительное число, не равное 1.

Область определения - множество всех действительных чисел.

Область значений - множество всех положительных действительных чисел.

6.Логарифмическая функция.

,

где, a,a1 и x

Функция определена при всех положительных действительных значениях x.

7.Экспоненциальная функция.

Экспоненциальная функция - частный случай показательной функции при основании, равном числу e=2,7182818, которое называют основанием натуральных логарифмов. Она выражается формулой

$$\mathbf{y=e^x}$$

Область определения - множество всех действительных чисел.

Область значений - множество всех положительных действительных чисел.

8.Тригонометрические функции.

Тригонометрические функции- периодические функции.

1) y=sinx, y=cosx.

Область определения -множество действительных чисел.

Область значений- множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку [-1;1].

2)y=tqx

Область определения-все числа, кроме x=+к, кZ;

y=ctqx

Область определения-все числа, кроме x= к, кZ.

Если y=f(u), где u= (x), т.е. если y зависит от x через посредство промежуточного аргумента u, то y называется сложной функцией от x.

1.3.Предел функции

Число A называется пределом функции y=f(x) при стремлении x к числу a, если модуль разностиможет стать сколь угодно малой величиной при достаточно малом значении модуля разности.

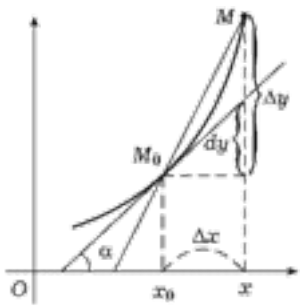
2.Элементы дифференциального исчисления

Понятие производной – одно из основных понятий математического анализа. Производная функции характеризует скорость изменения этой функции при изменении ее аргумента.

2.1.Производная функции

Производная функции y=f(x) в точке x_0 *–это предел отношения приращения функции y в этой точке к соответствующему приращению аргумента x при x*

Геометрический смысл производной: для данной функции y=f(x) ее производная = для каждого значения x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в соответствующей точке.



Физический смысл производной**:** скорость изменения функции y=f(x) относительно ее аргумента x. Производная характеризует быстроту изменения функции, т.е. скорость роста.

Процесс нахождения производной носит еще название дифференцирования функции.

2.2.Правила дифференцирования

Правила вычисления производных, применяемые при решении теоретических и практических задач.

1.Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных этих функций:

если y=u(x)v(x), то =.

2.Производная произведения двух функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и первой на производную второй:

если y=u(x)v(x), то =.

3.Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

если y=cu(x) (c=const), то =c.

4. Производная дроби равна дроби, знаменатель которой есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведениями знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя:

если y= , то .

Таблица производных:

1.Производная постоянной величины равна нулю:

если y=c (c=const), то =0.

2.Производная степенной функции

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

3.*Производная показательной функции*

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

4.Производная экспоненциальной функции

$(e^x)' = e^x$

5.*Производные логарифмической функции*

6.*Производные тригонометрических функций*

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

(tgx)'=

(ctgx)'=-

7.*Производные обратных тригонометрических функций*

(arcsinx)'=

(arccosx)'=

(arctgx)'=

(arcctgx)'= -

2.3 Производная сложной функции

Производная сложной функции y *равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной :*

=.

2.4 Дифференциал функции

Дифференциал функции y=f(x) в точке x_0-*это главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента Δx. Обозначается* $\boldsymbol{dy= y'\Delta x}$. *Дифференциал независимой переменной x равен ее приращению:*

$$dx=\Delta x.$$

Дифференциал функции $dy= y'dx$ или $dy= f'(x_0)dx$ равен ее производной, умноженной на дифференциал аргумента.

Дифференциал функции dy имеет геометрический смысл: *это приращение ординаты касательной к графику функции в точке x_0.*

Свойства дифференциала функции

Пусть u=u(x) и v=v(x)-некоторые дифференцируемые функции, c-вещественное число.

1.dc=0.

2.d(u+v)=du+dv.

3.d(cu)=cdu.

4.d)= .

5.d(uv)=vdu+udv.

6.df(u)=f'(u)du, где u=(x).

2.5 Функции нескольких переменных

Величина и называется функцией переменных величин x,y,z*, если каждой рассматриваемой совокупности этих величин соответствует одно определенное значение величины и:*

$$u=f(x,y,z).$$

Частные производные первого порядка

Частная производная функции u=f(x,y) нескольких переменных по аргументу x*-это предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что последнее приращение стремится к нулю:*

$=u'_x =.$

Частный дифференциал функции*-это произведение частной производной по одной из независимых переменных на дифференциал этой переменной.*

$$d_x u=dx; \quad d_y u=dy; ; \quad d_z u=dz.$$

Полный дифференциал du функции u*-это сумма частных дифференциалов функции u=f(x,y,z).*

$$du=dx+ dy+dz.$$

2.6 Градиент функции

Градиент **–**характеристика, показывающая направление и величину максимальной скорости изменения функции в данной точке.

Градиент функции u=f(x,y,z)- *это вектор, координаты которого равны частным производным , , в точке M(x,y,z).*

$$gradu=\{, , \}.$$

Градиент функции характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке.

Пример1.

Найти производную функции: $y=x^3+5x-7$

Решение:

$y'=(x^3+5x-7)'=(x^3)'+(5x)'-(7)'$.

Применяя формулы из таблицы основных формул дифференцирования, получим:

$y'=3x^2+5$

Пример2

Найти производную функции:

Решение: применяя основные формулы дифференцирования, получим:

y'=()'==

Пример 3

Найти производную функции: $y=(1+5x)^3$

Решение:

Обозначим $1+5x=u$ и $y=u^3$. Тогда, правило дифференцирования сложной функции, получим:

$y'=3u^2(1+5x)'=3(1+5x)^2\ 5=15(1+5x)^2$.

Пример 4

Найти производную функции: $y=\sin 3x$.

Решение:

Обозначим $3x=u$, найдем:

$y'=(\sin 3x)'=(\sin u)'=\cos u u'=\cos 3x 3=3\cos 3x$

Пример 5

Найти дифференциал функции: $y=5x+x^2$ в точке $x=3$.

Решение:

$dy=y'dx$.

Найдем производную функции: $y'=5+2x$.

Подсчитаем ее значение в точке x=3: $y'_{x=3}$=5+23=11

dy=11dx.

<u>Пример 6</u>

Зависимость между массой вещества, получаемой в некоторой химической реакции, от времени t определяется формулой $M=5(1+3e^{-2t})$. Найти скорость реакции.

Решение:

Возьмем производную от М по времени t:

=-15=-30

<u>Пример 7</u>

В результате значительной потери крови содержание железа в крови уменьшилось на 150 мг. Недостаток железа вследствие его восстановления с течением времени уменьшается по закону y=150 мг. (t- в сутки). Найти зависимость скорости восстановления железа в крови от времени. Вычислить эту скорость в момент време t=5 суток.

Решение:

Скорость восстановления железа:

y'=-150=-50

Через 5 суток скорость восстановления равна:

y'(5) =-50 =50 = ==18,5

3.Элементы интегрального исчисления

3.1Первообразная функция

В математическом анализе операцией, обратной дифференцированию, является интегрирование. В прямой задаче по известной функции находят ее производную, в обратной - по известной производной находят саму функцию.

Первообразная функция для функции y=f(x) *называется такая функция F(x), удовлетворяющая условию*

$$\mathbf{F'(x)=f(x).}$$

Две первообразные одной функции отличаются друг от друга на постоянную величину. Если F(x) -первообразная для функции f(x), то и функция $F(x)+C$, где C- произвольное постоянное число, также первообразная для функции $f(x)$, т.к. $(F(x)+C)'=f(x)$.

3.2 Неопределенный интеграл

Совокупность всех первообразных функций F(x)+C для функции f(x) называется ***неопределенным интегралом функции y=f(x).***

где :

-знак интеграла;

f(x)-подынтегральная функция;

f(x)dx- подынтегральное выражение;

C- постоянная интегрирования;

x- переменная интегрирования.

Геометрический смысл неопределенного интеграла*- семейство кривых, отличающихся параметром C, получаемых путем параллельного сдвига вдоль оси Oy.*

Свойства неопределенного интеграла

1.d (f(x)dx)=f(x)+C.

2.f (x)=f(x)+C.

x =x.

x=x +x.

Таблица основных формул интегрирования

1.x=+C, n

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.
9.
10.
11. «Высокий логарифм»:

12. «Длинный логарифм»:

Способы интегрирования

1. Метод непосредственного интегрирования.

Задача нахождения неопределенных интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов.

2. Метод подстановки (интегрирование заменой переменной).

Если функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то в данном неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ всегда можно перейти к новой переменной t по формуле:

$$\int f(x)dx= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Затем найти интеграл из правой части и вернуться к исходной переменной. При этом, интеграл, стоящий в правой части данного равенства, может оказаться проще интеграла, стоящего в левой части этого равенства, или даже табличным.

3. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирование по частям основан на следующей формуле:

$$\int udv=uv-\int vdu\ ,$$

где, $u(x),v(x)$ –непрерывно дифференцируемые функции.

Данная формула показывает, что интеграл $\int udv$ приводит к интегралу $\int vdu$, который может оказаться более простым, чем исходный, или даже табличным.

Пример 8

Найти неопределенный интеграл)^{2}dx

∫ (1 -) ^{2} d x = ∫ (1 - 2 + x) d x = ∫ d x - ∫ 2 d x + ∫ x d x = ∫ d x - 2 ∫ x $^{\frac{1}{2}}$ d x + ∫ x d x =

$$x-2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}+C=x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C$$

Пример 9

Найти неопределенный интеграл *d*x.

Решение:

Положим x+1=t, тогда,

x=t-1, $x^2=(t-1)^2$; $(x+1)^3=t^3$.

Продифференцируем x+1=t, получим *d*x=*d*t.

*d*x=*d*t=-2+=-2*d*t+*d*t=ln-2++C= ln+- +C= ln+- +C.

Пример 10

Найти неопределенный интеграл x*d*x.

Решение:

x*d*x =*d*x =*d*x=-sin2x+C.

Пример 11

Найти неопределенный интеграл x*d*x.

Решение:

Обозначим u=lnx; *d*v=*d*x, т.е. v=x; *d*u=(lnx)'*d*x.

x*d*x=xlnx-x)'*d*x=xlnx-*d*x= xlnx-x+C= x(lx-1)+C

3.3 Определенный интеграл

Определенный интеграл - *общий предел всех интегральных сумм функции f(x) на отрезке [a;b].*

) ,

где f(x)-подынтегральная функция,

x- переменная интегрирования.

Формула Ньютона-Лейбница

Если F(x)-первообразная функция для непрерывной функции y=f(x), т.е. F'(x)=f(x), *то имеет место формула*

=F(b)-F(a)

Определенный интеграл *равен разности значений любой первообразной функции для f(x) при верхнем и нижнем пределах интегрирования.*

Свойства определенного интеграла

1.При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

.

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

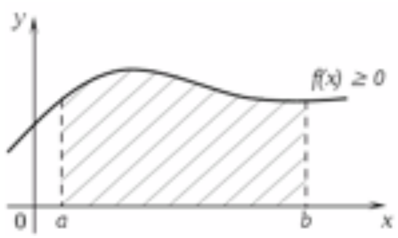
.

3.Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов.

4.Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

5.Отрезок интегрирования можно разбить на части:

Геометрический смысл определенного интеграла: *определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$; $x=b$; $y=0$ и частью графика функции $y=f(x)$, взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна.*



Пример 12

Вычислить определенный интеграл

Решение:

Применяя формулу Ньютона-Лейбница и свойства определенного интеграла, получим: $=2x^2|_{=}16-9=7$

Пример13

Вычислить определенный интеграл

Решение.

На основании таблицы основных интегралов и формулы имеем:

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

Пример 14

Найти работу при растяжении мышцы на x=3 см, если для ее растяжения на x_0 1см требуется нагрузка 8Н.

Решение:

Совершаемая работа равна:

A=800($0{,}03^2$-0)=0,36 Дж.

Ответ: A=0,36 Дж.

4.Дифференциальные уравнения

4.1 Основные понятия

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется *уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной x, неизвестной функции y = f(x) и её производных (или дифференциалов):*

Порядком *уравнения называется максимальный порядок* ***n*** *входящей в него производной (или дифференциала).*

Функция ***y(x)*** *называется* ***решением (или интегралом)*** *дифференциального уравнения , если при подстановке ее в уравнение обращает его в* ***тождество****.*

График решения дифференциального уравнения *называется интегральной кривой.*

Общее решение-семейство функций y=, удовлетворяющее этому уравнению при произвольном значении постоянных C.

Частное решение-решение, получающееся из общего решения при конкретных определенных значениях произвольных постоянных y=).Для нахождения частных решений задают начальные условия, если все они относятся к одному и тому же значению независимой переменной.

4.2 Дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y(x) и производную первого порядка искомой функции.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$\mathbf{F(x,y,y')=0}$$

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 называется *уравнением с разделяющимися переменными, если функции P и Q разлагаются на множители.зависящие каждый только от одной переменной.*

$$\mathbf{f_1(\ x)f_2(y)}d\mathbf{x+_1(x)_2(y)}d\mathbf{y=0.}$$

В таком уравнении после деления его членов на $f_2(y)(x)$ переменные разделяются:

Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка-это уравнения вида:

$$\mathbf{y'+P(x)y=q(x),}$$

где P(x) и q(x)-непрерывные функции.

Линейное однородное уравнение , если q(x)0,т.е уравнение вида:

$$\mathbf{y'+P(x)y=0}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

y=C .

Линейное неоднородное уравнение , если функция q(x) не равна тождественно нулю:q(x);

y'+P(x)y=q(x).

Общее решение линейного уравнения первого порядка находится методом вариации постоянной и имеет вид:

y(x)=[C+.

Уравнение Бернулли-это нелинейное уравнение вида:

y'+P(x)y=q(x),

где n-постоянное число.

При n=1-линейное однородное уравнение y'+(p-q)y=0.

При n=0-линейное неоднородное уравнение.

Если n и n, то нелинейные уравнения сводятся к линейным соответствующими заменами y(x).

Пример15

Решить уравнение y'+x²y=x²

Решение:

Это линейное неоднородное уравнение первого порядка, где P(x)=x^2, q(x)=x^2

,

*d*x=.

Решение уравнения: y(x)==C+1.

Пример 16

Решить уравнение xy'+y=e²

Решение:

Приведем уравнение к виду y'+ =.

P(x)= ,q(x)= .

; ==.

*d*x=*d*x=*d*x=,

общее решение имеет вид: y(x)=(+C).

Пример 17

Решить уравнение

Решение:

-общее решение.

Пример 18

Решить уравнение y'=x(y-1)

Решение:

x(y-1);

xdx;

;

ln

Выразим y из последнего выражения как функцию x, получим общее решение: y=C

Пример 19

Найти зависимость концентрации вещества в крови животного от времени. Если в начальный момент времени она была 0,4 , а через 22ч уменьшилась вдвое.Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент.

Решение:

-скорость изменения концентрации;

k-коэффициент пропорциональности, не зависящий от времени.

Знак «-» указывает на то, что концентрация убывает со временем.

Методом разделения переменных решаем уравнение 1-го порядка:

После интегрирования имеем:

$\ln C = -kt + \ln C_0$, $C = C_0$.

При t=22 часа 0,2=0,4 ;

2= ; k==0,03$ч^{-1}$.

Закон изменения концентрации: C(t)=0,4

Ответ: C(t)=0,4

5.Контрольные вопросы.

1.Дать определение функции.

2. Дать определение возрастающей функции.

3.Сформулировать определение монотонной функции.

4.Сформулировать определение нечетной функции.

5.Перечислить простейшие функции, которые являются четными.

6.Что называется приращением функции $y=f(x)$ в точке x_0?

7.Дать определение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0.

8.Каков физический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке x_0?

9.Что такое дифференциал функции в данной точке?

10.Может ли дифференциал функции в данной точке быть постоянной величиной?

11.Каков геометрический смысл дифференциала?

12.Каков физический смысл дифференциала?

13.Может ли существовать II-я производная функции, если не существует I-я производная?

14.Привести пример функции, у которой существует первая производная, но не существует вторая.

15.Дать определение первообразной функции.

16.Дать определение неопределенного интеграла.

17. Что такое определенный интеграл?

18. Перечислить свойства определенного интеграла.

19.При каких условиях справедлива формула Ньютона-Лейбница?

20.С какими прикладными науками связана теория дифференциальных уравнений?

21.Дать определение обыкновенного дифференциального уравнения.

22.Как определяется порядок дифференциального уравнения?

23. Дать определение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющими переменными.

24.Какое уравнение называется уравнением Бернулли?

6.Список литературы:

1.Колесов В.В., Романов М.Н. Математика для медицинских вузов. «Феникс».2015.

2.Омельченко В.П.,КурбатоваЭ.В. Математика. Ростов н/Д: «Феникс».2013.