ГОУ ВПО
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Н. Акимов, И.Н. Коновалова

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА,

КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕКТОРЫ

и их приложения

Учебное пособие

Москва 2018 год

Оглавление

Аннотация

В учебном пособии изложены основы теории комплексных чисел и комплексных векторов. В части, посвященной теории комплексных чисел, приведено большое количество как примеров решения типовых задач, так и задач для самостоятельного решения.

На основе вещественных векторов и их свойств вводится понятие комплексных векторов и действий над ними: такими как линейные операции, скалярное и векторное произведения, выводятся свойства перечисленных операций. На примерах задач физического характера демонстрируется эффективность методов, использующих понятия и свойства комплексных чисел и комплексных векторов. Уделено особое внимание вычислению средних по времени нелинейных операций для периодических процессов гармонического типа.

По содержанию отдельных глав пособие предназначено для студентов младших и старших курсов вузов.

Введение

Во многих разделах математики и ее приложениях невозможно ограничиться рассмотрением лишь действительных чисел. Потребности этих разделов заставляют обобщить понятие о числе и ввести в рассмотрение множество комплексных чисел, множество более обширное, по сравнению с множеством действительных чисел. С необходимостью расширения рассматриваемого множества чисел мы неоднократно сталкиваемся в процессе изучения математики.

Первое наше знакомство с математикой начинается с понятия числа. Числа, полученные при счете, называются натуральными. Обозначают натуральные числа буквой *n,* а все множество натуральных чисел буквой **N**. Таким образом, **N** = $\{1,\ 2,\ 3, \ldots, n, \ldots\}$ есть обозначение числового множества натуральных чисел. (Обратим внимание, что знаки фигурных скобок здесь, как и в других случаях, используются для обозначения множества, заданного перечислением его элементов).

В процессе изучения алгебры понятие числа несколько раз расширяется. Так, например, для того, чтобы решить уравнение вида $x+a=b$ одних натуральных чисел недостаточно. Скажем, уравнение $x+5=1$ в множестве натуральных чисел решения не имеет. Поэтому к натуральным числам необходимо добавить отрицательные натуральные («минус натуральные») числа и нуль. Так получается множество *целых* чисел, обозначаемое буквой **Z**. Таким образом, **Z** $=\{\ldots,-n,\ \ldots,-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,n,\ \ldots\}$ есть расширение множества натуральных чисел, а множество натуральных есть подмножество целых чисел. В этом числовом множестве уравнение вида $x+a=b$ будет иметь решение всегда.

Дальнейшее расширение чисел произошло тогда, когда возникла потребность в числах вида $\frac{m}{n}$, в частности, при решении уравнений вида $ax+b=0$. Числа такого вида назвали *рациональными* («разумными», в переводе с латыни). К этому множеству относятся все обыкновенные дроби, конечные десятичные дроби и бесконечные периодические десятичные дроби. Легко понять, что при $n=1$, получаем множество целых чисел, которое является подмножеством рациональных чисел. Соответственно, а множество рациональных чисел является расширением целых чисел. Множество рациональных чисел обозначается буквой **Q**.

Наряду с перечисленными дробями еще существуют бесконечные непериодические десятичные дроби. Например, числа π = 3,141592654…, $\sqrt{2}=1{,}414213562\ldots$, и так далее. В частности, такие числа получаются при решении алгебраические уравнения степени выше первой, например, $x^2 = 2, \quad x^3 = 3$. Бесконечные непериодические десятичные дроби называются *иррациональными* («неразумными») числами. Если к множеству рациональных чисел добавить множество иррациональных чисел, то получим множество действительных (вещественных) чисел. Оно обозначается буквой **R.** Этого множества чисел бывает достаточно для решения многих задач.

Однако, уже не всякое квадратное уравнение можно решить во множестве действительных чисел. Скажем, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения в действительных числах, потому что не существует такого действительного числа, квадрат которого был бы равен минус единице. Это приводит к необходимости расширить множество действительных чисел до такого множества, чтобы любое квадратное уравнение имело бы решение. Таким расширением является множество *комплексных* чисел.

Краткие исторические сведения о комплексных числах.

История комплексных чисел началась с XVI века. Итальянские математики Д. Кардано и Р. Бомбелли, решая квадратные уравнения, ввели в рассмотрение символ $\sqrt{-1}$ – формальное решение уравнения $x^2 + 1 = 0$, а также символ $b\sqrt{-1}$ – формальное решение уравнения $x^2 + b^2 = 0$.

Тогда выражения более общего вида $\grave{a} + b\sqrt{-1}$ можно рассматривать как формальные решения уравнений $(x - a)^2 + b^2 = 0$. Впоследствии выражения $\grave{a} + b\sqrt{-1}$ стали называть мнимыми, а затем комплексными числами. Однако сам Кардано счел такие символы бесполезными, непригодными к употреблению. Назвал он их «софистическими» числами, желая этим подчеркнуть их парадоксальность. Считалось, что корень квадратный из отрицательного числа не имеет смысла, и в тоже время произведение двух таких корней оказалось вполне реальным числом. Название «мнимая» не следует понимать буквально; оно сохранилось с тех времен (XVI – XVII вв.). Даже в XVII веке для многих ученых алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной, загадочной и даже мистической. Известно, например, что И. Ньютон не включал мнимые величины в понятие числа, а Г. Лейбницу принадлежит фраза: «Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием». Для современной математики комплексные числа – понятие совершенно естественное (не более «мнимое», чем сами действительные числа).

Начало применению комплексных чисел в математике положили Г. Лейбниц и И. Бернулли. Лейбниц утверждал, что логарифмы отрицательных чисел существуют и являются комплексными числами.

Со второй половины XVIII в. началась уже интенсивная разработка вопросов, связанных с понятием комплексного числа. Начало систематического использования комплексных чисел связано с работами Эйлера и Даламбера, которые выяснили ряд свойств комплексных чисел и их связь с некоторыми задачами геодезии, картографии, гидродинамики.

Однако, несмотря на все достижения теории, математики отказывались считать комплексные числа реально существующими. Основным противоречием была неопределенность самого понятия мнимой единицы: с одной стороны, было известно, что не существует числа, квадрат которого был бы равен минус единице, и в то же время действия с такого рода «мнимыми» числами приводили к правильным результатам. Таким образом, надо было или признать, что комплексные числа являются своего рода условностью, или же найти их истолкование, связанное с объективной реальностью. Такое истолкование и было найдено в самом конце XVIII в.

Сам термин «комплексное число» впервые ввел в научный обиход Л.Карно, но использовать его стали только после того, как в работах К.Гаусса и У. Гамильтона была построена арифметическая теория комплексных чисел и дана их геометрическая интерпретация.

Надо заметить, что впервые геометрическое изображение комплексных чисел было предложено Г. Кюном, учителем гимназии в Данциге в середине восемнадцатого века. Однако только спустя полвека норвежский математик Г. Вессель дал общее геометрическое истолкование комплексных чисел и показал, что все известные до того времени числа являются лишь частными случаями комплексных. Наиболее полное изложение теории комплексных чисел было дано У. Гамильтоном, ему же принадлежит важное пространственное обобщение комплексного числа – квартенионы (гиперкомплексные числа).

глава 1. комплексные числа

§1. Определение комплексных чисел и действия над ними

Для того, чтобы стало понятным нижеследующее определение комплексных чисел, вспомним, какую целью мы преследуем, пытаясь построить новую систему чисел. Наша задача добиться того, чтобы любое алгебраическое уравнение всегда имело решение или, другими словами, была бы всегда возможна операция извлечения корня из любого (даже отрицательного) числа. В качестве «строительного материала» мы можем использовать весь имеющийся арсенал средств алгебры.

Вначале вспомним геометрическую интерпретацию действительных чисел, согласно которой каждому действительному числу соответствует точка на координатной прямой. Это сопоставление систематически используется во всех разделах математики и является столь привычным, что обычно не делается различия между действительным числом и точкой, его изображающей.

Теперь опишем комплексное число как упорядоченную пару действительных чисел:

$$z = (a, b)\,.$$

Тогда сразу появляется возможность соотнести каждое комплексное число z с точкой на плоскости, имеющей координаты a и b. При этом число a называют *действительной частью* комплексного числа z и обозначают $\operatorname{Re} z$, а действительное число b называют *мнимой частью* комплексного числа и обозначают $\operatorname{Im} z$ (от английских слов «real» и «imaginary»), т.е. $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. (Еще раз подчеркнем, что a и b – это «обычные» действительные числа.) Плоскость, которая используется для представления комплексных чисел, называется *комплексной плоскостью* или z-плоскостью. Ось OX – называется действительной осью, а ось OY – мнимой осью. Величина действительной части есть абсцисса точки, а величина мнимой части есть ордината точки (рис.1).

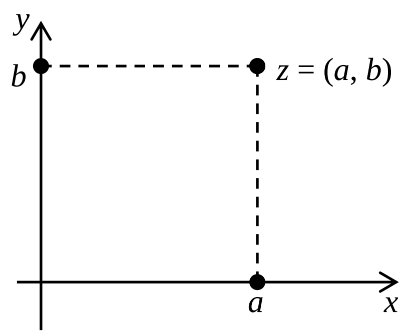

Рис. 1.

В случае равенства нулю мнимой части ($\operatorname{Im} z = 0$), получаем точки вида $(a,0)$, лежащие на оси абсцисс (координатной прямой). Т.е. в этом случае комплексное число является обычным действительным числом, откуда следует, что действительные числа есть подмножество комплексных чисел, а множество комплексных является расширением действительных чисел.

До сих пор нам не приходилось совершать арифметические действия над точками плоскости, поэтому мы вправе определять свойства и вводить арифметические операции над комплексными числами таким образом, чтобы новая система обладала всеми свойствами действительных чисел и такими свойствами, ради которых ее создают.

Будем считать, что два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ *равны* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2.$$

Обратим внимание, что для комплексных чисел понятия «больше» и «меньше» не существует. Если, для точек, расположенных на числовой прямой большей является та, которая лежит правее, то для точек плоскости аналогичного отношения ввести невозможно, поэтому комплексные числа нельзя соединять знаком неравенства.

Рассмотрим комплексные числа, отличающиеся только знаком мнимой части. Такие числа называются сопряженными друг другу. Если дано число $z = (a, b)$, то *сопряженным* ему будет число $\bar{z} = (a, -b)$. Сопряженные числа обладают рядом замечательных свойств, о которых будет сказано чуть позже.

Точки, изображающие сопряженные числа, всегда симметричны относительно действительной оси OX (рис. 2).

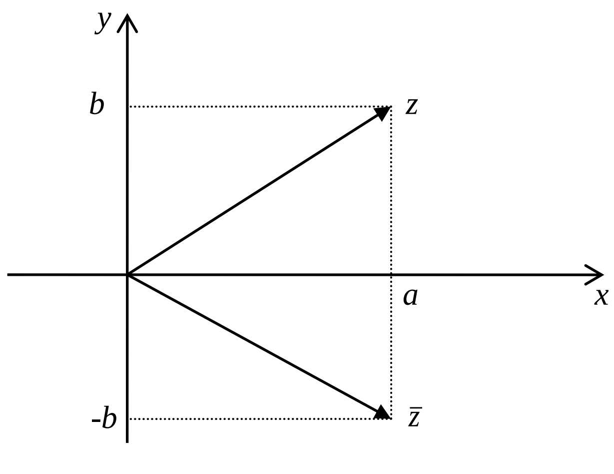

Рис. 2.

Для любой пары комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ определим их *сумму* по формуле

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2). \tag{1.1}$$

Как видно из формулы, для нахождения суммы необходимо отдельно сложить действительную и мнимую части.

Например, найдем $z = z_1 + z_2$, если $z_1 = (3, -2)$, $z_2 = (1, 4)$:

$$z = (3+1, -2+4) = (4, 2).$$

Сумма комплексных чисел, определенная таким образом обладает такими же свойствами, что и сумма действительных чисел, т.е. выполняются свойства:

а) коммутативности: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

б) ассоциативности: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

в) существования нуля: существует число $z = 0$ (или $z = (0, 0)$), такое что $z + 0 = z$ для всех z.

Существование нуля позволяет рассмотреть операцию обратную сложению.

Если $z_1 = (a, b)$, а $z_2 = (-a, -b)$, то $z_1 + z_2 = 0$. Поэтому число z_2 называют *противоположным* для числа z_1.

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называют комплексное число $z = (x, y)$, такое что $z_2 + z = z_1$. То есть

$$z = z_1 - z_2 = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2,\ b_1 - b_2). \tag{1.2}$$

Изображение комплексных чисел точками плоскости позволяет дать операциям сложения и вычитания простую геометрическую интерпретацию.

Пусть даны числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$.

Рассмотрим соответствующие им точки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) как векторы, исходящие из начала координат, тогда сумма (или разность) может быть найдена по правилу сложения (или вычитания) векторов, т. е. по правилу параллелограмма или по правилу треугольника. Таким образом, сумма двух комплексных чисел будет изображаться большей диагональю параллелограмма (рис.3), а разность замыкающей стороной треугольника, отнесенной к началу координат (рис.4).

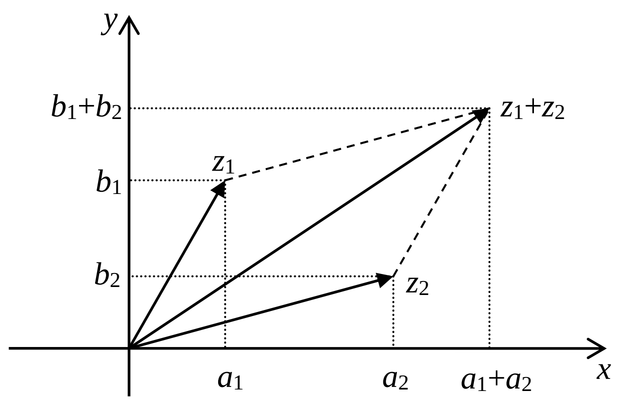

Рис. 3

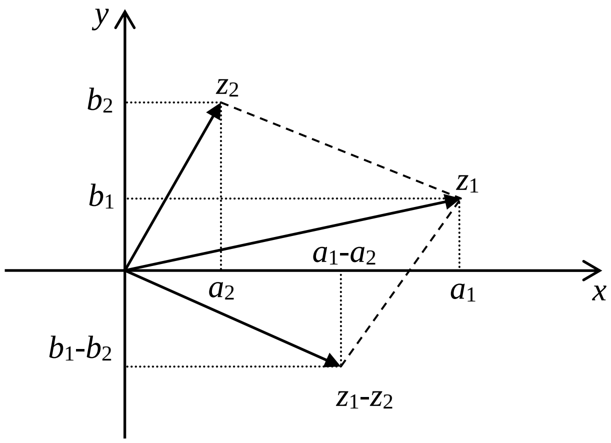

Рис. 4.

Для любой пары комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ определим их *произведение* по формуле

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2,\ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1). \tag{1.3}$$

Геометрический смысл произведения станет ясным после того, как мы введем тригонометрическую форму записи комплексных чисел.

Произведение, введенное таким образом, обладает следующими свойствами:

а) коммутативности: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

б) ассоциативности: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

в) дистрибутивности: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$;

г) умножения на единицу: $z \cdot (1, 0) = z$;

д) умножения на нуль: $z \cdot (0, 0) = 0$.

Аналогичными свойствами обладает произведение действительных чисел.

Итак, если комплексные числа вида $z = (a, 0)$ мы назвали действительными числами, то комплексные числа вида $z = (0, b)$ логично назвать *чисто мнимыми*. Так, число (1, 0) – есть обычная единица, а число (0, 1) называют *мнимой единицей* и обозначают специальным символом «i», т.е. $i = (0, 1)$.

Исследуем операции с чисто мнимыми числами.

Рассмотрим произведение:

$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1;\ \ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \in \mathbf{R} \ \Rightarrow i^2 = -1.$

Получили, что произведение двух чисто мнимых чисел дает действительное отрицательное число. Полученный результат говорит о том, что цель, ради которой создавалась новая система чисел, достигнута. Действительно, теперь уравнение $x^2+1=0$ имеет решение: $x^2=-1$, $x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$, где

$$i=\sqrt{-1} \text{ – мнимая единица.} \tag{1.4}$$

Рассмотрим действительное число b или, что то же самое, $z = (b, 0)$. Выполним умножение этого числа на мнимую единицу

$$b\cdot i=(b,0)\cdot(0,1)=(b\cdot 0-0\cdot 1,\ b\cdot 1+0\cdot 0)=(0,b).$$

Видно, что умножение действительного числа на мнимую единицу переводит действительное число в чисто мнимое число. Выполним теперь следующие действия над комплексным числом $z = (a, b)$.

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a+bi.$$

Эти простые действия дают возможность любое комплексное число представить в более удобном виде

$$z = a + bi. \tag{1.5}$$

Такая форма записи называется *алгебраической формой* комплексного числа.

В такой форме записи удобно совершать некоторые арифметические действия. Итак, $z = (a, b)$ и $z = a + bi$ одно и то же число, записанное разными способами. Обратим внимание, что в алгебраической форме записи символ i показывает, какое из двух действительных чисел является мнимой частью комплексного числа и ни какого другого смысла не несет.

§ 2. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Рассмотрим теперь, как осуществлять арифметические действия над комплексными числами, записанными в алгебраическом виде.

Пусть даны $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда, в соответствии с данными выше определениями суммы, разности, произведения и деления комплексных чисел будем иметь следующее.

1. **Сумма (разность)** комплексных чисел вычисляется по формуле

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i . \qquad (2.1)$$

Легко увидеть, что сложение (вычитание) осуществляется по правилу сложения многочленов с приведением подобных членов.

Например,

$$(3+4i)+(5-6i)=(3+5)+(4-6)i=8-2i;$$

$$(3+4i)-(5-6i)=(3-5)+(4-(-6))i=-2+10i.$$

2. **Произведение** комплексных чисел вычисляется следующим образом

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i. \qquad (2.2)$$

Приведенную формулу необходимости запоминать нет. Видно, что и произведение определяется как умножение многочлена на многочлен, с последующим приведением подобных членов и с учетом того, что $i^2 = -1$.

Например, $(2+2i)(-1+2i) = -2+4i-2i+4i^2 = -6+2i$.

Прежде, чем ввести операцию деления, рассмотрим свойства комплексных чисел. Вспомним, что сопряженными называются комплексные числа, отличающиеся знаком мнимой части, то есть числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ являются сопряженными друг другу.

Как уже было сказано, сопряженные числа обладают замечательными свойствами, которые используются при выполнении арифметических действий, а именно:

1) $z + \bar{z} = (a+bi)+(a-bi) = 2a$;

2) $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$;

3) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$. (2.3)

4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$;

5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$.

Особенно важными являются первые два свойства. Они говорят о том, что сумма и произведение комплексных сопряженных чисел всегда являются действительными числами.

3. **Деление** двух комплексных чисел осуществляется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a^2 + b^2}, \ (z_2 \neq 0). \tag{2.4}$$

И эту формулу запоминать не надо, следует лишь понять, что деление заменяется умножением. По свойству дроби, она не изменится, если числитель и знаменатель умножить на одно и тоже число. Воспользуемся этим и умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю. В результате этого, в знаменателе окажется произведение сопряженных чисел, которое всегда есть число действительное, т.е. деления на комплексное число больше нет.

Например, $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{1+2i-1}{2} = i$.

Возведение в степень определяется следующим образом:

$$z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$$

n-раз.

Легко показать, комплексная степень обладает такими же свойствами, что и действительная.

$$\begin{aligned} &z^n \cdot z^m = z^{n+m}, \\ &(z^n)^m = z^{nm}, \\ &(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Примеры действий над комплексными числами.

Пример 1. Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -4 + 3i$.

Решение.

$$z_1 + z_2 = (2 + (-1)\cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3)\, i = -2+2i.$$

Пример 2. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + 5i$.

Решение.

$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (-4 + 5i) = 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-3i) + 2\cdot 5i - 3i\cdot 5i = 7+22i$.

Пример 3. Найти частное z от деления $z_1 = 3 - 2i$ на $z_2 = 3 - i$.

Решение.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-2i)}{(3-i)} = \frac{(3-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{11-3i}{9+1} = \frac{11}{10} - \frac{3}{10} i.$$

Пример 4. Решить уравнение: $3x - (1-i)(x - yi) = 2 + 3i$, x и $y \in R$.

Решение.

$$3x-((x-y)+(-x-y)i)=2+3i;$$

$$(2x+y)+(x+y)i=2+3i.$$

В силу равенства комплексных чисел имеем:

$$\begin{cases}2x+y=2,\\ x+y=3,\end{cases}$$

откуда $x=-1$, $y=4$.

Пример 5. Вычислить: i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1}, i^{-2}.

Решение.

$$i^2=i\cdot i=-1;$$

$$i^3=i^2\cdot i=-i;$$

$$i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-(-1)=1;$$

$$i^5=i^4\cdot i=i;$$

$$i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=-1;$$

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i\cdot i}=-i;$$

$$i^{-2}=\frac{1}{i^2}=-1.$$

Пример 6. Вычислить z^{-3}, если $z=1-i$.

Решение.

$$z^{-3}=(1-i)^{-3}=\frac{1}{(1-i)^3}=\frac{1}{1-3i+3i^2-i^3}=\frac{1}{-2-2i}=\frac{-2+2i}{(-2)^2+(-2)^2}=$$

$$=\frac{-2+2i}{8}=-0.25+0.25i.$$

Пример 7. Вычислить число z^{-1}, обратное числу $z=3-i$.

Решение.

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{3-i}=\frac{3+i}{(3-i)(3+i)}=\frac{3+i}{3^2+1^2}=\frac{3+i}{10}=0.3+0.1i.$$

Пример 8. Записать комплексное число $z=\dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$ в виде $a+bi$.

Решение.

$$z=\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}=\frac{5+i}{2+2i-3i+3}=\frac{5+i}{5-i}=\frac{(5+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{25+10i-1}{25+1}=\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i.$$

§3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Из приведенных выше примеров видно, что в алгебраической форме записи удобно и просто выполнять операции сложения и вычитания. Операции умножения, деления и возведения в степень выполняются уже несколько сложнее, а об операции извлечения корня мы вообще пока не упоминали. Это связано с тем, что извлечение корня из комплексного числа осуществляется, если оно записано в тригонометрической форме. В этой же форме записи упрощаются операции умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня. Тригонометрическую форму записи легко получить, если вспомнить геометрическую интерпретацию комплексного числа.

Согласно введенному в §1 определению, комплексной плоскостью называется плоскость с декартовыми координатами (x, y). При этом каждой точке с координатами (a, b) поставлено в соответствие комплексное число $z = a + bi$. Тогда каждое комплексное число $a + bi$ геометрически изображается на плоскости как точка $A(a, b)$ или вектор $\overline{OA}$.

Как известно, положение точки можно задать не только с помощью координат, а также с помощью длины вектора $|\overline{OA}| = r$ и угла φ, образованного вектором $\overline{\text{ÎÀ}}$ с положительным направлением действительной оси (рис. 5). Назовем длину вектора модулем комплексного числа и обозначим $|z| = r$, а угол φ назовем *аргументом* комплексного числа и обозначим $\varphi = \arg z$. Заметим, что $\arg z$ имеет смысл только, если $z \neq 0$; для $z = 0$ аргумент смысла не имеет.

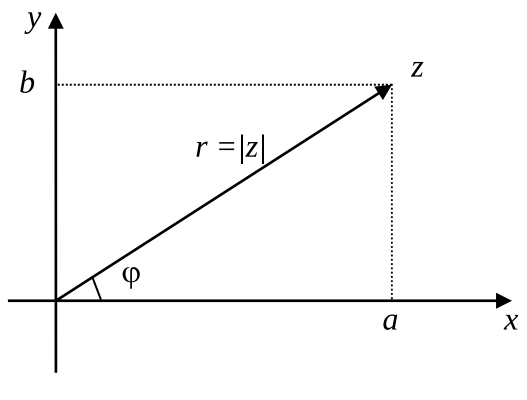

Рис. 5

Следовательно, любое комплексное число однозначно определяется модулем и аргументом. Из рис. 5 видно, что

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\ , \qquad (3.1)$$

т.е. модуль – это всегда действительное, положительное число, причем оно равно нулю лишь для точки 0. Для комплексного числа, лежащего на действительной оси, т.е. являющегося действительным числом, число *r* будет абсолютной величиной числа *z*, поэтому иногда и модуль комплексного числа называют абсолютной величиной.

Аргумент комплексного числа можно определить из любой нижеследующей формулы

$$\cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r},\ \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \tag{3.2}$$

которые вытекают из соотношений прямоугольного треугольника.

Угол φ может принимать любые действительные значения, как положительные, так и отрицательные. Положительным направлением отсчета аргумента комплексного числа считается направление от положительной полуоси действительной оси к положительной полуоси мнимой оси, т.е. против часовой стрелки при обычном расположении осей.

Как видно из формул, сам аргумент определяется неоднозначно, а с точностью до $2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Для однозначного определения аргумента выделяют его главное значение, иногда его обозначают Arg *z*, то есть значение, определенное на отрезке $[0; 2\pi]$ или $[-\pi; \pi]$. Но даже на этих отрезках каждое из приведенных тригонометрических уравнений имеет по два решения. Для точного определения аргумента необходимо решить систему из двух любых приведенных тригонометрических уравнений или воспользоваться следующим приемом. На комплексной плоскости изображают число, определяют четверть, в которой оно находится, после чего угол определяется однозначно.

Примеры действия с комплексными числами.

Пример 1. Найти модуль комплексных чисел $z_1 = 4-3i$ и $z_2 = -2-2i$.

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$$
$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Пример 2. Найти аргументы комплексных чисел:

1) $z = -3-3i$. Решение. Воспользуемся для определения аргумента формулой $\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Получим $\mathrm{tg}\varphi = \frac{-3}{-3} = 1$. Этому условию удовлетворяет как угол $\frac{\pi}{4}$, так и угол $\frac{5\pi}{4}$. Но, так как и абсцисса и ордината данного комплексного числа отрицательны, то точка соответствующая данному числу лежит в третьей четверти, следовательно, аргумент равен $\frac{5\pi}{4}$.

Пример 3. Определить на комплексной плоскости области, задаваемые условиями:

1) $|z| = 5$; 2) $|z| \le 6$; 3) $|z-(2+i)| \le 3$; 4) $6 \le |z-i| \le 7$.

Решение и ответы:

1) $|z| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 5 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 5^2$ - уравнение окружности радиусом 5 и с центром в начале координат. Таким образом, уравнение $|z| = 5$ задает окружность, радиусом 5 и с центром в начале координат.

2) круг радиусом 6 с центром в начале координат.

3) круг радиусом 3 с центром в точке $z_0 = 2 + i$.

4) кольцо, ограниченное окружностями с радиусами 6 и 7 с центром в точке $z_0 = i$.

Пример 4. Найти модуль и аргумент чисел:

1) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$; 2) $z_2 = -2 - 2i$.

Решение:

1) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$; $a = 1$, $b = \sqrt{3} \Rightarrow r_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^3} = \sqrt{4} = 2$,

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = \dfrac{a}{r} \Rightarrow \cos\varphi_1 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{b}{r} \Rightarrow \sin\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Таким образом, $|z_1| = 2$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ и $Arg z_1 = \frac{\pi}{3}$

2) $z_2 = -2 - 2i$; $a = -2$, $b = -2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_2 = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_2 = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Таким образом, $|z_2| = 2\sqrt{2}$, $\arg z_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ и $Arg z_2 = \frac{5\pi}{4}$

Рекомендация: при определении главного аргумента воспользуйтесь комплексной плоскостью.

Используя формулы $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, любое комплексное число можно записать в виде

$$z = a + bi = r cos\varphi + r sin\varphi i = r(cos\varphi + i sin\varphi) \tag{3.3}$$

Таким образом, всякое комплексное число $z = a + bi$ однозначным образом можно записать в виде (3.3), где $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \arg z$ (причем аргумент φ определен лишь с точностью до $2\pi k$). Такая запись числа z называется его *тригонометрической формой***.**

Эта форма записи очень широко используется, так как для комплексных чисел, записанных в этом виде, значительно упрощаются умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

Пример 5. Записать в тригонометрической форме следующие числа:

1) $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 2) $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 3) $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 4) $z_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

5) $z=\dfrac{i-1}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$.

Решение:

1) $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$$r=|z_1|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,\qquad \left.\begin{aligned}\cos\varphi_1&=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\\ \sin\varphi_1&=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \varphi_1=\frac{\pi}{3}$$

(За значение угла берем наименьшее неотрицательное из возможных значений аргумента).

Таким образом: $z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

2) $z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_2=1$, $\varphi_2=\frac{2\pi}{3}$, $z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

3) $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r_3=1$, $\varphi_3=\frac{4\pi}{3}$, $z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$.

4) $z_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r_4=1$, $\varphi_4=\frac{5\pi}{3}$, $z_4=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$.

5) Пусть $z=\dfrac{i-1}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$. Положим $z_1=i-1$, $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, тогда

$|z_2|=2$, $\arg z_2=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\arg z_1-\arg z_2)+i\sin(\arg z_1-\arg z_2)\big)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}+2\pi m)+i\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi m)\right),\ m\in\mathbf{Z}.$$

Рассмотрим действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

1. Умножение. Пусть комплексные числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Перемножим эти числа:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\right)\cdot\left(r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2),$$

или

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right). \qquad (3.4)$$

Таким образом, чтобы найти произведение комплексных чисел, записанных в тригонометрическом виде достаточно перемножить модули и сложить аргументы.

Формула (3.4) справедлива для любого конечного числа сомножителей

$$z_1 \ldots z_n = r_1 \ldots r_n\,(\cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)). \qquad (3.5)$$

Если $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то формула (1.15) принимает вид:

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (3.6)$$

Формула (3.6) называется *формулой Муавра*. Она показывает, что для возведения комплексного числа в натуральную степень нужно возвести в эту степень его модуль, а аргумент умножить на показатель степени.

Формула Муавра остается верной и для целых отрицательных показателей. Действительно, так как $z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n$, то достаточно применить формулу Муавра к числу z^{-1}, предварительно записанного в тригонометрическом виде.

Пример 6. Найти $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $\quad z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$,

Решение. $\quad z_1 \cdot z_2 = 6(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})) = 6(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$.

Пример 7. Вычислить $(1+i)^{30}$.

Решение. Запишем сначала число $(1+i)$ в тригонометрическом виде:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \quad (1+i)^{30} = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right)^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30}(\cos\frac{30\pi}{4} + i\sin\frac{30\pi}{4}) =$$
$$= 2^{15}(\cos\frac{15\pi}{2} + i\sin\frac{15\pi}{2}) = -2^{15}i.$$

Пример 8. Записать число $\quad z = \left(\sqrt{3} + i\right)^{17}$ в алгебраической форме.

Решение. Сначала представим число z в тригонометрическом виде, выполним необходимые действия и вернемся к алгебраической форме. Модуль числа z равен $\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{3+1}=2$. Аргумент числа z найдем из системы $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin\varphi=\dfrac{1}{2},\\ 0\le\varphi<2\pi.\end{cases}$

Откуда следует, что $\arg z=\dfrac{\pi}{6}$.

Таким образом, $\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}=\left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^{17}$.

Выполняя возведение в степень по формуле Муавра, получим

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}=2^{17}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Сделаем переход к алгебраической форме записи числа.

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}=2^{17}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2^{17}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-2^{16}\sqrt{3}+2^{16}i.$$

2. Деление. Аналогичные правила имеют место и для нахождения частного. Действительно, пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, причем $r_2\neq 0$. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right),$$

или

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (3.7)$$

Т.е. модуль частного двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен частному модулей, а аргумент частного – разности аргументов.

Пример 9. Найти частное $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$, $z_2=2(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3})$.

Решение.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{-17\pi}{12}+isin\frac{-17\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{7\pi}{12}+isin\frac{7\pi}{12}\right)$$

Геометрический смысл умножения теперь выясняется без затруднений. Если числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ рассмотреть как векторы, то тогда для получения вектора $z = z_1 z_2$ необходимо от действительной оси отложить в положительном направлении угол ($\varphi_1 + \varphi_2$), и на полученном луче отложить от начала координат отрезок длиной $r_1 \cdot r_2$ (рис 6).

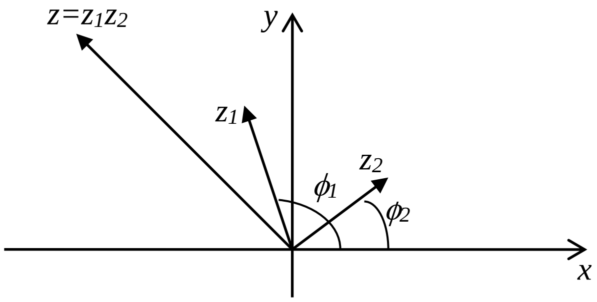

Рис. 6.

Аналогичный геометрический смысл имеет и деление (рис.7). Для получения $\frac{z_1}{z_2}$, от действительной оси в положительном направлении откладываем угол ($\varphi_1 - \varphi_2$), и на полученном луче, считая от начала координат, отмечаем отрезок длиной $\frac{r_1}{r_2}$.

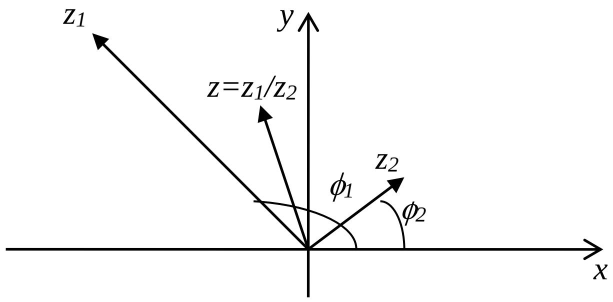

Рис.7.

Формула Муавра $\left((\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n \in \mathrm{N}\right)$ находит много применений, в частности с ее помощью легко доказать известные из тригонометрии формулы. Так, например, если $n = 3$, то, возведя левую часть по формуле сокращенного умножения в куб, получим равенство

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \left(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi\right) + \left(3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi\right)i\ .$$

Из равенства комплексных чисел и основного тригонометрического тождества получаем формулы для тройных углов, известные из школьного курса тригонометрии.

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi.$$

Также с помощью формулы Муавра можно находить суммы тригонометрических функций.

Пример 10. Найти сумму $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n-1)x, \quad x \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$

Решение**.** Рассмотрим сумму

$$S(x) = (\cos x + i\sin x) + (\cos 3x + i\sin 3x) + \ldots + (\cos(2n-1)x + i\sin(2n-1)x).$$

Из формулы Муавра имеем: $(\cos kx + i\sin kx) = (\cos x + i\sin x)^k$.

Таким образом, сумма S(x) примет вид:

$$S(x) = (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^3 + \ldots + (\cos x + i\sin x)^{2n-1}.$$

Эта сумма есть геометрическая прогрессия из n слагаемых с первым членом $b_1 = \cos x + i\sin x$ и знаменателем прогрессии $q = (\cos x + i\sin x)^2$. По формуле $S = \dfrac{b_1 - q^n b_1}{1-q}$ для суммы n членов геометрической прогрессии, имеем:

$$S(x) = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos x + i\sin x)^{2n+1}}{1 - (\cos x + i\sin x)^2} = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x)}{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x - 2i\sin x\cos x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \cos(2n+1)x) + i(\sin x - \sin(2n+1)x)}{2\sin x(\sin x - i\cos x)} =$$

$$= \frac{((\cos x - \cos(2n+1)x) + i(\sin x - \sin(2n+1)x))(\sin x + i\cos x)}{2\sin x(\sin x - i\cos x)(\sin x + i\cos x)} =$$

$$= \frac{(\cos x - \cos(2n+1)x)\sin x - (\sin x - \sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x)} +$$

$$+ i\,\frac{((\sin x - \sin(2n+1)x)\sin x + (\cos x - \cos(2n+1)x)\cos x)}{2\sin x}.$$

$$\operatorname{Im} S(x) = \frac{\sin^2 x - (\sin(2n+1)x)\sin x + \cos^2 x - (\cos(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} = \frac{1 - \cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

$$\operatorname{Re} S(x) = \frac{\cos x\sin x - (\cos(2n+1)x)\sin x - \sin x\cos x + (\sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

В исходном выражении для $S(x)$ было:

$$\operatorname{Im} S(x) = \sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x,$$

$$\operatorname{Re} S(x) = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x.$$

Сравнивая мнимые и действительные части, получаем следующие формулы:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x},$$
$$\cos x + \cos 3x + \ldots \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

Сумму и разность комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, нельзя выразить формулами, подобными формулам (1.14) и (1.17). Однако для модуля суммы имеют место следующие неравенства:

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Иными словами, модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей слагаемых, но не больше или равен разности этих модулей.

Рассмотрим еще одно важное арифметическое действие.

3**. Извлечение корня из комплексного числа**.

Определение. *Корнем n-ой степени* $(n \in \mathbf{N},\ n \ge 2)$ из числа z называется любое комплексное число u, для которого n-я степень равна z, т.е. имеют место равенства

$$\sqrt[n]{z} = u, \quad z = u^n. \tag{3.8}$$

Ясно, что если $z = 0$, то единственным значением $\sqrt[n]{z}$ является число 0, поэтому рассмотрим случай, когда $z \ne 0$.

Прежде чем мы перейдем к операции извлечения корня, обратим внимание на следующий факт. Если во множестве действительных чисел операция извлечения корня четной степени из отрицательного числа была невозможна, то во множестве комплексных чисел ограничений на значение подкоренного выражения нет. Второе отличие состоит в том, что во множестве комплексных чисел значений корня будет не одно, как в множестве действительных чисел, а столько, каков показатель корня. Эти утверждения доказываются в курсе высшей алгебры, мы лишь ограничимся формулировкой этой теоремы.

Теорема. *Для любого комплексного числа $z \ne 0$ извлечение корня n-ой степени, при $n \ge 2$, всегда возможно и имеет ровно n различных значений.*

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Надо найти $\sqrt[n]{z}$.

Искомый корень n-ой степени также будет являться комплексным числом, поэтому обозначим его $u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Таким образом, мы найдем значения корня, если определим величины ρ и θ.

Из определения корня имеем $u^n = z$. Откуда следует равенство:

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули и аргументы. Приравняем модули и аргументы с учетом многозначности. Получим, что последнее равенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Так как $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$, то $\rho \geq 0$. Известно, что для любого положительного числа существует единственное положительное значение корня n-ой степени, называемое арифметическим корнем.

Таким образом, модуль комплексного числа определяется как арифметический корень из действительного положительного числа r $(|u| = \rho = \sqrt[n]{r})$, а аргумент находят по формуле

$$\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

При разных значения k получаем разные значения корня.

Таким образом, все значения корня можно определить по формуле

$$u_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), \ k = \overline{0, n-1}. \qquad (3.9)$$

Запись $k = \overline{0, n-1}$ означает, что параметр k принимает все натуральные значения от 0 до $n-1$ включительно, то есть k = 0, 1, 2, … , n – 1.

Эту формулу иногда называют *обобщенной формулой Муавра*.

Пример 11.

Вычислить $u = \sqrt[6]{\sqrt{3} - i}$.

Решение. Представим число $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Имеем $\sqrt{3} - i = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right))$, тогда

$u_k = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{6} + isin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{6}\right)$, где k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Таким образом, значения корней:

$$u_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{36} - i\sin\frac{\pi}{36}),$$

$$u_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 1}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 1}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{11\pi}{36}),$$

$$u_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 2}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 2}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}),$$

$$u_3 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 3}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 3}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{35\pi}{36} + i\sin\frac{35\pi}{36}),$$

$$u_4 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 4}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 4}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{47\pi}{36} + i\sin\frac{47\pi}{36}),$$

$$u_5 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 5}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 5}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{59\pi}{36} + i\sin\frac{59\pi}{36}).$$

Геометрически корни можно интерпретировать как числа, изображающие в комплексной плоскости вершины правильного n угольника (в рассмотренном примере - шестиугольника), вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{r}$ (в рассмотренном примере радиусом $\sqrt[6]{2}$), с центром в начале координат.

В частности, корень n – ой степени из действительного числа $a \neq 0$ также имеет n различных значений; действительных среди этих значений будет два, одно или ни одного в зависимости от знака a и четности n.

Пример 12.

Найти: 1) $\sqrt{1}$, 2) $\sqrt[3]{i}$, 3) $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

Решение:

Сначала представим числа в тригонометрическом виде, а затем воспользуемся формулой (3.9).

1) Так как для единицы модуль и аргумент определяется устно, то имеем

$$u_k = \sqrt{1} = \sqrt{1(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt{1}(\cos\frac{0+2\pi k}{2} + i\sin\frac{0+2\pi k}{2}), \quad k = \overline{0,1}$$

$u_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$,

$u_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

Таким образом, корень квадратный из единицы во множестве комплексных чисел имеет два значения плюс и минус единицу.

2) Для чисто мнимого числа модуль и аргумент также определяется устно.

$$u_k = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}) =$$

$$= \cos\frac{\pi+4\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+4\pi k}{6}, \ k = 0, 1, 2.$$

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i),$$

$$u_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i),$$

$$u_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Таким образом, корень третьей степени имеет три разных значения.

3) Обозначим $z = -8 + i8\sqrt{3}$ и запишем z в тригонометрическом виде:

$$|z| = \sqrt{64 + 64\cdot 3} = 16 = 2^4, \qquad \varphi = \arg z = arctg\,\frac{8\sqrt{3}}{-8} = \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

Так как, число z находится во второй четверти (действительная часть - отрицательна, а мнимая – положительна) комплексной плоскости, то $\varphi = Argz = \dfrac{2\pi}{3}$.

Итак, $z = 2^4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

$$u_k = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2^4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right),\ k = \overline{0,3}.$$

Это дает:

$$u_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$u_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$u_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$u_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Изобразим найденные корни на комплексной плоскости (рис. 8).

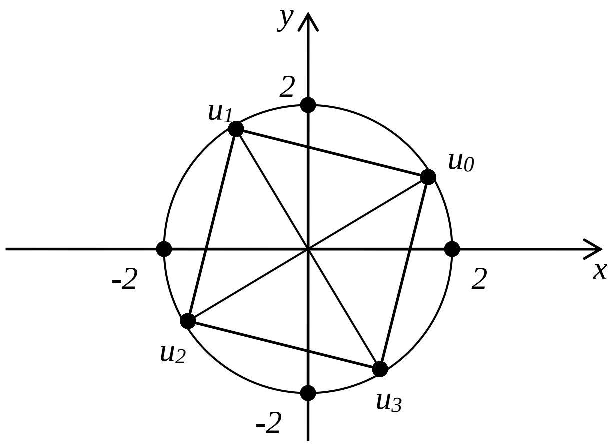

Рис. 8.

Ввиду особой важности рассмотрим отдельно случай извлечения корня n-ой степени из единицы. В соответствии с общей теорией этот корень будет иметь ровно n значений. Найдем эти значения. Для этого запишем число 1 в тригонометрическом виде.

$$z = (1, 0) = 1 + 0 \cdot i, \quad |z| = 1, \quad \operatorname{Arg} z = 0,$$

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 .$$

Здесь мы нашли аргумент, не прибегая к формулам, а исходя из геометрических соображений. Если мнимая часть равна нулю, то число располагается на действительной оси и, следовательно, угол может быть равен либо 0, либо π, а так как действительная часть положительна, то угол равен 0. Таким образом, все корни n-ой степени из единицы будут задаваться формулой

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.10}$$

Полезно помнить значения квадратных, кубических корней из единицы и значения корней четвертой степени.

Квадратный корень из единицы имеет два значения: 1 и –1 (см. пример 12).

Найдем значения кубических корней и корней четвертой степени из единицы, пользуясь формулой (3.10).

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}, \; k = 0, 1, 2.$$

$$u_0 = cos\frac{2\pi\cdot 0}{3} + isin\frac{2\pi\cdot 0}{3} = 1,$$

$$u_1 = cos\frac{2\pi\cdot 1}{3} + isin\frac{2\pi\cdot 1}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$u_2 = cos\frac{2\pi\cdot 2}{3} + isin\frac{2\pi\cdot 2}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Заметим, что кроме самой единицы, значения корней являются сопряженными межу собой числами.

$$\sqrt[4]{1} = \cos\frac{2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi k}{4},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

$$u_0 = cos\frac{2\pi \cdot 0}{4} + isin\frac{2\pi \cdot 0}{4} = 1$$

$$u_1 = cos\frac{2\pi \cdot 1}{4} + isin\frac{2\pi \cdot 1}{4} = i$$

$$u_2 = cos\frac{2\pi \cdot 2}{4} + isin\frac{2\pi \cdot 2}{4} = -1$$

$$u_3 = cos\frac{2\pi \cdot 3}{4} + isin\frac{2\pi \cdot 3}{4} = -i$$

Графическое изображение корней четвертой степени из единицы представлены на следующем рисунке (рис. 9).

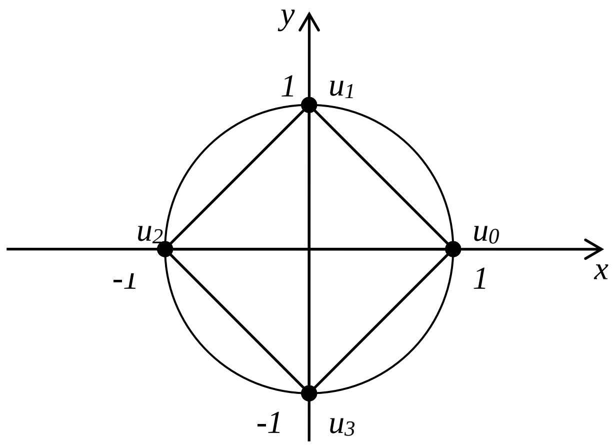

Рис. 9.

Видно, что и в данном случае комплексные корни являются сопряженными между собой числами. Эта закономерность сохраняется для корней любой степени, т.к. действительные значения корня n-ой степени из единицы получаются из формулы (3.10) при значениях $k = 0$ и $k = \frac{n}{2}$, если n четно и при $k = 0$, если n нечетно. Отсюда следует, что те из корней n-ой степени из единицы, которые не являются действительными, всегда будут попарно сопряженными комплексными числами. Геометрически это означает, что на комплексной плоскости корни n-ой степени из единицы расположены на окружности единичного радиуса и делят ее на n равных дуг; при этом одной из точек деления служит число 1.

Зная значения корней n-ой степени из единицы, можно легко получить значения корней n-ой степени из любого комплексного числа. Для этого достаточно умножить любое одно значение искомого корня на все корни n-ой степени из единицы.

Докажем справедливость этого утверждения. Пусть u_k – значение корня n-ой степени из числа z, здесь k любое из чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, на практике в качестве k удобно брать 0.

Если u_k – значение корня, то имеет место $(u_k)^n = z$. Пусть θ – произвольное значение корня n-ой степени из единицы. Тогда $(u_k \cdot \theta)^n = u_k^n \cdot \theta^n = z \cdot 1 = z$, это означает, что $z \cdot \theta$ также будет одним из значений корней для $\sqrt[n]{z}$. Тогда, умножая u_k на все значения корня n-ой степени из единицы, мы получим n различных значений корня n-ой степени из числа z, т.е. все значения корня.

Пример 13. Найти $\sqrt[3]{8}$.

При $k = 0$, получаем одно из значений кубического корня $u_0 = \sqrt[3]{8} = 2$. А теперь, значения корней получим, умножая найденное значение на значения корня кубического из единицы. Так как $\sqrt[3]{1}$ имеет три значения $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$u_0 = u_0 \cdot \varepsilon_0 = u_0 = 2,$$

$$u_1 = u_0 \cdot \varepsilon_1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$u_2 = u_0 \cdot \varepsilon_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

§4. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

Помимо алгебраической и тригонометрической имеется еще *показательная форма* записи комплексного числа, которая широко используется в различных приложениях, в частности в электротехнике.

Рассматривая степень a^x, мы сначала определяли ее только для натуральных значений x – как произведение равных сомножителей. Из определения следовали следующие свойства:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$$

Затем определение степени было расширено, показатель степени стал принимать целые значения. Действия со степенями с отрицательным и нулевым показателем осуществляются по правилам:

$$à^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1.$$

Далее вводятся дробные показатели, в этом случае значение степени вычисляется с помощью корней по правилу:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}\ ,\ q \in \mathbf{N},\ p \in \mathbf{Z}.$$

Все перечисленные свойства и правила неприменимы к комплексному показателю, например, мы не знаем, что такое 3^{5-i}.

Однако великий ученый Эйлер заметил связь между степенью с комплексным показателем и комплексным числом. Впервые степень с комплексным показателем при основании e = 2,71828… была введена Эйлером. Решая задачи интегрального исчисления он заметил, что имеет место следующее равенство

$$e^{a+bi} = e^a\left(\cos b + i\sin b\right).$$

Это равенство легло в основу определения степени с комплексным показателем.

Пусть $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, зависит от действительной переменной φ.

Сопоставим взаимно однозначным образом каждому комплексному числу $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ комплексно показательное выражение $u(\varphi) = e^{i\varphi}$. Получим

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (4.1)$$

Эта формула называется *формулой Эйлера* и представляет собой определение показательной функции $e^{i\varphi}$ от комплексной переменной (где φ – любое действительное число) и не может быть доказана. Однако с помощью операций дифференцирования можно показать, что эти выражения имеют одну и ту же логическую сущность.

Нетрудно выразить любое комплексное число через степень с комплексным показателем. Пусть дано комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Сопоставляя это с формулой (4.1), получаем

$$z = re^{i\varphi}. \tag{4.2}$$

Эта форма записи комплексного числа называется показательной формой комплексного числа. В этой форме записи удобно осуществлять операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Соответствующие формулы записываются следующим образом.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} &z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\ &\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \\ &z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} \\ &\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Пример 1. Найти показательную форму чисел

а) $z_1 = 1 + i$; б) $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

Решение:

а) $r = |z_1| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z_1 = \frac{\pi}{4}, \quad z_1 = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

б) $r = |z_2| = 2, \quad \varphi = \arg z_2 = \frac{7\pi}{6}, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{7\pi i}{6}}$.

Пример 2. Найти алгебраическую форму чисел

а) $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, б) $z_2 = 3e^{-\frac{\pi i}{6}}$, в) $z_3 = e^{-3+4i}$.

Решение:

а) $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$,

б) $z_2 = 3e^{\frac{-\pi i}{6}} = 3(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)) = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$,

в) $z_3 = e^{-3+4i} = e^{-3} \cdot e^{4i} = e^{-3}(\cos 4 + i\sin 4) \approx 0.05(-0.65 - 0.76i) \approx -0.03 - 0.038i$.

Пример 3. Найти $z_1 z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$, результат записать в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 3e^{\frac{2i}{3}}$, $z_2 = 6e^{\frac{i}{6}}$; б) $z_1 = e^{3-7i}$, $z_2 = e^{-4+5i}$.

Решение:

а) $z_1 z_2 = 3e^{\frac{2i}{3}} \cdot 6e^{\frac{i}{6}} = 18e^{\frac{5i}{6}} = 18(\cos\frac{5}{6} + i\sin\frac{5}{6})$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2i}{3}}}{6e^{\frac{i}{6}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{2} + i\sin\frac{1}{2}),$$

б) $z_1 z_2 = e^{3-7i} \cdot e^{-4+5i} = e^{-1-2i} = e^{-1}(\cos(-2) + i\sin(-2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{7-12i} = e^{7}(\cos 12 - i\sin 12).$$

Пример 4. Вычислить: а) z^4, б) $\sqrt[5]{z}$, где $z = 2e^{-3i}$.

Решение:

а) $z^4 = (2e^{-3i})^4 = 16e^{-12i} = 16(\cos 12 - i\sin 12) \approx 16(0.8438 + 0.5366i)$,

б) $\sqrt[5]{2e^{-3i}} = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi k}{5}i} = u_k$, $k = 0,1,2,3,4$

$$u_0 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3i}{5}} = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{3}{5} - i\sin\frac{3}{5}) \approx 0.95 - 0.65i,$$

$$u_1 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi}{5}i} \approx 0.91 + 0.70i,$$

$$u_2 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+4\pi}{5}i} \approx -0.39 + 1.08i,$$

$$u_3 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+6\pi}{5}i} \approx -1.15 - 0.03i,$$

$$u_4 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+8\pi}{5}i} \approx -0.33 - 1.10i.$$

С помощью степени с мнимым показателем можно выразить тригонометрические функции. Так как, равенство $e^{a+bi} = e^{a}\left(\cos b + i\sin b\right)$ справедливо для любых a и b, то оно справедливо и для $a = 0$, получим

$$\cos b + i\sin b = e^{bi}$$

Заменив b на $-b$, получим

$$\cos b - i\sin b = e^{-bi}.$$

Складывая и вычитая почленно эти равенства, получим

$$\begin{aligned} \cos b &= \frac{e^{bi}+e^{-bi}}{2} \\ \sin b &= \frac{e^{bi}-e^{-bi}}{2i}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Эти формулы также называют *формулами Эйлера* и широко используют в высшей математике и физике. Из этих формул показательные функции можно выразить через тригонометрические функции, то есть они устанавливают связь между классом тригонометрических и показательных функций.

Как известно, показательная функция является обратной к логарифмической. Воспользуемся этим для введения понятия натурального логарифма от комплексного числа (т.е. в том числе и от отрицательного аргумента).

Пусть дано комплексное число $z = re^{i\varphi}$. Используя основное логарифмическое тождество, представим число r в виде $r = e^{\ln r}$, тогда$z = re^{i\varphi} = e^{\ln r} \cdot e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi}$. Вычисляя логарифмы от обеих частей последнего равенства, получим, что

$$\ln z = \ln r + \varphi i. \tag{4.5}$$

Последнее равенство есть определение логарифма от комплексного числа.

То есть, натуральным логарифмом комплексного числа z называется показатель степени, в которую надо возвести e, чтобы получить логарифмируемое число.

Из определения видно, что логарифм состоит из суммы действительного и чисто мнимого числа, при этом действительной частью логарифма комплексного числа есть логарифм его модуля, а мнимой частью – его аргумент. Введенное таким образом определение логарифма имеет смысл для всех комплексных чисел, кроме нуля. Обратим внимание на то, что в силу неоднозначного определения аргумента, логарифмическая функция комплексного переменного будет являться многозначной функцией (строго говоря, понятие функции здесь неприменимо), поэтому необходимо установить однозначность. Однозначность можно установить, выбирая ветвь логарифма, т.е. рассматривать не все значения аргумента а, например, только те, для которых $-\pi \le \varphi \le \pi$ или $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Пользуясь формулой (4.5) можно вычислять логарифмы от отрицательных чисел.

Пример 5. Вычислить $\ln(-1)$.

Решение. Представим – 1 в показательной форме. Вычислив модуль и аргумент, получим: $-1 = e^{\pi i}$. Тогда, $\ln(-1) = \ln e^{\pi i} = \pi i$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

1) (3-2i) + (5+3i);

2) (1+2i) – (3 - i);

3) 3(2 – i)·(1 – i);

4) (1 + 3i)(-7 + 2i);

5) $(2 – i)^2$;

6) $(1 + 2i)^3$.

2. Найти решение уравнений ($x, y \in$ R):

1) (1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i;

2) 2x + (1 + i)(x + y)=7 +i;

3) (3 – y + x)(1 + i) + (x – y)(2 + i) = 6 – 3i.

3. Вычислить:

1) i^{13}, 4) $\frac{5}{1+2i}$, 7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$,

2) i^{65}, 5) $\frac{2i-3}{1+i}$, 8) $\frac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$,

3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$, 6) $\frac{2+3i}{i}$, 9) $(2-i)^2$.

4. Найти z^{-1}, если:

1) z = 7 – 12i,

2) z = 3 + 4i,

3) z = –3 + 7i,

4) z = i.

5. Вычислить:

1) $(1 + i\sqrt{3})^3(1 – i)^7$

2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$

3) $\frac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

6. Доказать, что $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}$; $\overline{-z_1}=-\overline{z_1}$.

7. Доказать, что если $z=a+bi$, то $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$.

8. Построить точки, соответствующие комплексным числам:

–1; i; $-\sqrt{2}$; –3i; 2 – 3i; –4–2i; 3+i; –6 + 2i; 2 + 2i; –2 + 2i; –2 – 2i.

9. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1 = -2 + i, \quad z_2 = 3 - i$,

2) $z_1 = -3, \quad z_2 = 4i$.

10. Изобразить геометрическое множество всех комплексных чисел

$z = x + yi$, у которых:

1) $x = 2$; 2) $1 \le x \le 3$; 3) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; 4) $\operatorname{Im} z = 2\operatorname{Re} z$.

11. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

1) $z = 1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$; 3) $z = \sqrt{2}i$; 4) $z = 2$; 5) $z = -i$.

12. Указать на комплексной плоскости множества точек, соответствующие комплексным числам z, удовлетворяющих условиям:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \le 5$; 3) $1 \le |z| \le 2$; 4) $\arg z = 0$; 5) $\frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$;

6) $|z - 1| = \frac{1}{3}$; 7) $|z - 3 + 2i| \le 2$.

13. Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:

1) $1, \ -1, \ i, \ -i$

2) $z = 3 - 3i$

3) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}$.

14. Доказать, что для любых чисел z_1 и z_2 имеет место тождество

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

и дать его геометрическую интерпретацию.

15. Даны числа:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}, \quad z_2 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}, \quad z_3 = \cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}.$$

Вычислить: 1) $z_1 z_2 z_3$; 2) $\frac{z_1}{z_2 z_3}$; 3) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$; 4) $\frac{z_1 z_3}{z_2}$.

16. Вычислить $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$.

17. Вычислить $|z|$ и $\arg z$, если $z = \frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}$.

18. Упростить выражение $\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$.

19. Дано: $z=\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$, вычислить z^n, найти модуль и аргумент числа z^n.

20. Дано: $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$. Вычислить z^n.

21. Вычислить корни и результат изобразить на комплексной плоскости.

1) $\sqrt[5]{1}$; 2) $\sqrt[4]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

22. Выразить в радикалах корни из единицы степени 2, 3, 4, 6, 8.

23. Представить в показательной форме комплексные числа:

1) $-1-i$; 2) i; 3) $1+i$.

24. Найти тригонометрическую и алгебраическую форму для чисел:

1) $z=2e^{\frac{\pi i}{4}}$; 2) $z=4e^{\frac{\pi i}{2}}$; 3) $z=3e^{\pi i}$; 4) $z=e^{i}$.

25. Найти z_1z_2 и $\dfrac{z_1}{z_2}$, результат написать в алгебраической форме.

1) $z_1=1{,}5e^{0{,}7i}$; $z_2=0{,}7e^{1{,}7i}$,

2) $z_1=e^{-0{,}7+3i}$; $z_2=e^{1{,}5+2i}$.

26. Вычислить z^6 и $\sqrt[4]{z}$, результаты представить в алгебраической форме и изобразить их на плоскости.

1) $z=4{,}2e^{2{,}3i}$; 2) $z=0{,}4e^{\pi i}$; 3) $z=3{,}5e^{5i}$; 4) $z=-16$.

27. Вычислить:

1) $\ln(-1)$, 2) $\ln(i)$, 3) $\lg(1-i)$.

28. Доказать тождество $z_1\operatorname{Im}(\overline{z_2}z_3)+z_2\operatorname{Im}(z_1\overline{z_3})+z_3\operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2)=0$.

29. Решить уравнение $z^2+|z|=0$.

30. Доказать, что если $|z|\le 1$, то $\left|\dfrac{2z-i}{2+iz}\right|\le 1$.

31. Найти тригонометрическую форму комплексного числа :

1) $1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$,

2) $2+i\sin\dfrac{\pi}{6}$,

3) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$.

32. Решить систему $\begin{cases} z^2+|z|=0 \\ \overline{z}=-4z \end{cases}$.

глава 2. комплексные векторы

§5. Свойства геометрических (вещественных) векторов

В этом параграфе мы определим новые объекты, так называемые комплексные векторы, а также действия над ними. Однако, прежде чем переходить к рассмотрению комплексных векторов, напомним необходимые для дальнейшего свойства операций над геометрическими векторами, которые, как это и принято в векторной алгебре, будем называть векторами. С другой стороны, когда речь пойдет о новых объектах, комплексных векторах, наименование «комплексный» опускать не будем. Объектами изучения векторной алгебры являются геометрические векторы, над которыми определены операции (действия) сложения и умножения на действительное число. Сложение векторов и умножения на число называют *линейными операциями*. Мы полагаем известными [7] определение суммы векторов и умножение вектора на действительное число, поэтому воспроизведем здесь лишь свойства линейных операций. Эти сведения о свойствах операций над геометрическими векторами будут востребованы при выяснении свойств операций над комплексными векторами.

Правило сложения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обладает теми же четырьмя свойствами, что и правило сложения вещественных чисел:

1°. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (свойство коммутативности);

2°. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\ \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (свойство ассоциативности);

3°. существует нулевой вектор $\boldsymbol{o}$ такой, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$;

4°. для каждого вектора $\boldsymbol{a}$ существует противоположный ему вектор $\boldsymbol{a}^{/}$ такой, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{/}=\ \boldsymbol{o}$.

Операция умножения геометрического вектора на вещественное число обладает следующими тремя *свойствами* (α,β - вещественные числа):

5°. $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$ (свойство дистрибутивности числового сомножителя относительно суммы векторов);

$6.^\circ$. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\ \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$ (свойство дистрибутивности векторного сомножителя относительно суммы чисел);

7°. $\alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a}$ (свойство ассоциативности числовых сомножителей.

Напомним, что свойства умножения вектора на число позволяют однозначным образом ввести определение разности векторов [7].

Именно благодаря свойствам $1^\circ \div 7^\circ$ обеспечивается возможность проводить преобразования выражений векторной алгебры по тем же правилам, по которым производятся подобные выкладки в обычной алгебре. Этими же свойствами обусловлено и фундаментальное значение математического аппарата векторной алгебры для целого ряда естественных и прикладных наук.

Идеи введения операций скалярного, векторного и смешанного произведений над векторами в значительной мере являются производными таких фундаментальных понятий, как работа силы, момент силы, объем и являются их обобщениями на абстрактном уровне.

Отмеченные операции над векторами существенно расширяют область их практического применения.

Нам понадобятся лишь две из только что перечисленных операций, а именно, скалярное $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и векторное произведения $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (или $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$)

Считая определения скалярного и векторного произведения известными [7], приведем здесь их алгебраические свойства.

Скалярное произведение векторов обладает следующими четырьмя свойствами:

1°. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ (свойство коммутативности);

2°. $(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (свойство ассоциативности);

3°. $\big((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}\big) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ (свойство дистрибутивности относительно суммы векторов)

4°. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$, если $\boldsymbol{a}$ – ненулевой вектор, и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$, если $\boldsymbol{a}$ - нулевой вектор.

Свойства $1^\circ \div 4^\circ$ имеют фундаментальное значение. В силу этих свойств оказывается возможным при скалярном перемножении векторных многочленов совершать действия почленно, не задумываясь о порядке следования векторных сомножителей и объединяя (сочетая) числовые множители.

Векторное произведение векторов обладает следующими четырьмя алгебраическими свойствами:

1°. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ (свойство антикоммутативности);

2°. $[\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (свойство ассоциативности);

3°. $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ (свойство дистрибутивности относительно суммы векторов);

4°. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{o}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$**.**

Здесь также следует отметить особую важность перечисленных свойств векторного произведения. В силу этих свойств оказывается возможным при векторном перемножении векторных многочленов совершать действия почленно и производить сочетание числовых множителей, однако следует *сохранять* порядок расположения векторных сомножителей (либо при изменении этого порядка *менять* знак на противоположный).

Наконец, для наших целей мы ограничимся введением лишь прямоугольного базиса. Упорядоченная тройка попарно перпендикулярных единичных векторов $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ образует прямоугольный базис (ортонормированный базис) в множестве всех геометрических векторов. В той части, где выбор ориентации базиса важен, будем считать ее правой (например, при вычислении векторного произведения).

Как доказывается в векторной алгебре, всякий геометрический вектор $\boldsymbol{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}; \qquad (5.1.)$$

вещественные числа a_x, a_y, a_z называются координатами (или компонентами) вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. а запись в форме (5.1.) называют разложением вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

Мы будем также в отдельных случаях называть вектор $\boldsymbol{a}$ вещественным или действительным вектором, имея в виду вещественность его координат в выбранном базисе.

§6. Алгебраическая форма комплексного вектора. Действия над комплексными векторами в алгебраической форме

Перейдем к определению комплексного вектора. Рассмотрим пару геометрических (т.е. вещественных или действительных) векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и определим новый объект $\boldsymbol{z}$ выражением

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}, \tag{6.1}$$

Выражения такой структуры будем называть комплексными векторами. При этом вектор $\boldsymbol{a}$ называют действительной частью комплексного вектора $\boldsymbol{z}$ и обозначают Re$\boldsymbol{z}$, а действительный вектор $\boldsymbol{b}$ называют мнимой частью комплексного вектора и обозначают Im$\boldsymbol{z}$, т.е. $\boldsymbol{a}$ =Re$\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{b} =$ Im$\boldsymbol{z}$. Комплексный вектор, мнимая часть которого равна нулю, является действительным вектором, т.е. вещественные векторы образуют подмножество множества комплексных векторов.

Будем считать два комплексных вектора $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{b}_2$ *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Прикладное значение комплексных вектора проявится в результате введения операций над этими объектами. Действуя в определенной мере по аналогии с введением арифметических действий над комплексными числами, записанными в алгебраической форме и рассмотренными в первой главе, определим операции сложения (разности), умножения комплексного вектора на комплексное число, произведения и комплексного сопряжения над комплексными векторами (операция деления не вводится, как и для геометрических векторов). Наконец, мы рассмотрим операции скалярного и векторного произведений комплексных векторов и продемонстрируем эффективность применения этих действий в приложениях к решению физических задач.

Начнем с операции сложения комплексных векторов. Пусть даны два комплексных вектора

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{b}_1\,,\ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{b}_2 \tag{6.2}$$

1**.** *Сумму (разность)* комплексных векторов введем по формуле:

•

$$\boldsymbol{z}_1 \pm \boldsymbol{z}_2 = (\boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{a}_2) + i(\boldsymbol{b}_1 \pm \boldsymbol{b}_2) \tag{6.3}$$

Выражения в скобках правой части (6.4) вполне определены, так как они являются суммой и разностью геометрических векторов, над которыми операции сложения (вычитания) введены в векторной алгебре. Сумма комплексных векторов, определенная согласно (6.3), обладает теми же свойствами $1^\circ \div 4^\circ$, что и сумма геометрических векторов, то есть выполняются равенства:

$\boldsymbol{1}^\circ$. $\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{z}_1$ (свойство коммутативности);

$\boldsymbol{2}^\circ$. $(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) + \boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{z}_1 + (\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{z}_3)$ (свойство ассоциативности);

$\boldsymbol{3}^\circ$. существует нулевой вектор $\widehat{\boldsymbol{o}}$ такой, что $\boldsymbol{z} + \widehat{\boldsymbol{o}} = \boldsymbol{z}$ для любого вектора $\boldsymbol{z}$;

$\boldsymbol{4}^\circ$. для каждого комплексного вектора $\boldsymbol{z}$ существует противоположный ему комплексный вектор $\boldsymbol{z}^/$ такой, что
$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^/ = \widehat{\boldsymbol{o}}$.

Доказательства приведенных свойств основаны на использовании свойств геометрических векторов $1^{\circ} \div 4^{\circ}$. Докажем свойство $\mathbf{1}^{\circ}$ операции сложения:

$$\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 = (\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + i(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) =$$

$$= (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1) + i(\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_1) = (\boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{z}_1$$

В процессе доказательства мы использовали дважды определение суммы комплексных векторов и свойство коммутативности геометрических векторов.

На основе свойства ассоциативности геометрических векторов легко устанавливается свойство $\mathbf{2}^{\circ}$:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) + \boldsymbol{z}_3 = ((\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{b}_2)) + (\boldsymbol{a}_3 + i\boldsymbol{b}_3) = \\ = ((\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + i(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)) + (\boldsymbol{a}_3 + i\boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) + i(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3) = \\ = (\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3)) + i(\boldsymbol{b}_1 + (\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3)) = \\ = (\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{b}_1) + ((\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) + i(\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3)) = \\ = (\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{b}_1) + ((\boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{a}_3 + i\boldsymbol{b}_3)) \\ = \boldsymbol{z}_1 + (\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{z}_3)\end{gathered}$$

Докажем свойство $\mathbf{3}^{\circ}$.Положим в выражении (6.1) геометрические векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ равными нулевому геометрическому вектору $\boldsymbol{o}$. Такой вектор по свойству 3° геометрических векторов существует. Рассмотрим комплексный вектор $\widehat{\boldsymbol{o}} = \boldsymbol{o} + i\boldsymbol{o}$ и убедимся, что он удовлетворяет определению нулевого комплексного вектора. Действительно, для любого комплексного вектора имеем:

$$\boldsymbol{z} + \widehat{\boldsymbol{o}} = (\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{o} + i\boldsymbol{o}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o}) + i(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{o}) = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b} = \boldsymbol{z}$$

На последнем этапе преобразований мы воспользовались свойством 3°: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{b}$. Свойство $\mathbf{3}^{\circ}$ доказано.

Перейдем к доказательству свойства $\mathbf{4}^{\circ}$. Пусть $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$ некоторый комплексный вектор и $\boldsymbol{a}^{/}, \boldsymbol{b}^{/}$ геометрические векторы, противоположные векторам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ соответственно. Определим новый комплексный вектор $\boldsymbol{z}^{/}$ выражением: $\boldsymbol{z}^{/} = \boldsymbol{a}^{/} + i\boldsymbol{b}^{/}$ и вычислим сумму

$$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^{/} = (\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}^{/} + i\boldsymbol{b}^{/}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^{/}) + i(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^{/}) = \boldsymbol{o} + i\boldsymbol{o} = \widehat{\boldsymbol{o}};$$

При переходе от третьего к четвертому выражению в ряду этих преобразований было использовано свойство 4°, а равенство суммы нулевому комплексному вектору означает, что комплексный вектор $\boldsymbol{z}^{/}$ есть вектор, противоположный $\boldsymbol{z}$. Итак, свойство $\mathbf{4}^{\circ}$доказано.

2.*Произведение комплексного* вектора $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$ *на комплексное* число $z = \alpha + i\beta$ определим как комплексный вектор следующим правилом вычисления:

$$z \cdot \boldsymbol{z} = (\alpha + i\beta)(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) = (\alpha\,\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}) + i(\alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{a}) \qquad (6.4)$$

В левой части (6.4) присутствуют операции произведения вещественного числа на вектор, обладающие свойствами $5^{\circ} \div 7^{\circ}$. Не трудно установить, что произведение комплексного вектора $\boldsymbol{z}$ на комплексное число $z = \alpha + i\beta$ сохраняет все три свойства операции умножения геометрического вектора на вещественное число. Приведем их без доказательств:

$\mathbf{5}^{\circ}$. $z(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) = z\boldsymbol{z}_1 + z\boldsymbol{z}_2$ (свойство дистрибутивности числового сомножителя относительно суммы комплексных векторов);

$\mathbf{6}^{\circ}$. $(z_1+z_2)\boldsymbol{z} = z_1\boldsymbol{z}+z_2\boldsymbol{z}$ (свойство дистрибутивности векторного сомножителя относительно суммы комплексных чисел);

$\mathbf{7}^{\circ}$. $z_1\,(z_2\boldsymbol{z}) = (z_1 z_2)\boldsymbol{z}$ (свойство ассоциативности числовых сомножителей).

3. **Сопряженными** называются комплексные векторы, отличающиеся знаком мнимых частей, то есть векторы $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}$ и $\bar{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{a}-i\boldsymbol{b}$. Мы будем также в приложении использовать и другое обозначение для комплексно сопряженного вектора: $\boldsymbol{z}^{*}=\boldsymbol{a}-i\boldsymbol{b}$.

Сопряженные комплексные векторы обладают свойствами 1)÷ 4) комплексно сопряженных чисел, перечисленных под номером (8) второго параграфа.

4.**Произведение комплексных векторов** определим как комплексное число следующим образом:

$$\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2=(\boldsymbol{a}_1+i\boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{a}_2+i\boldsymbol{b}_2)=$$

$$=[(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)-(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)]+i[(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2)+(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2] \qquad (6.5)$$

По внешнему виду выражение (6.5) аналогично выражению (2.7) для произведения комплексных чисел, но имеет место существенное различие: произведения чисел в (2.7) заменены на скалярные произведения геометрических векторов. Не трудно убедиться, что произведение комплексных векторов, определенное правилом (6.5), обладает следующими свойствами:

а) коммутативности: $\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{z}_1$;

б) дистрибутивности: $\boldsymbol{z}_1(\boldsymbol{z}_2+\boldsymbol{z}_3)=\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2+\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_3$;

в) умножения на нулевой вектор $\widehat{\boldsymbol{o}}$: $\boldsymbol{z}\widehat{\boldsymbol{o}}=0+i0$;

В правой части последнего равенства стоит комплексное число нуль. Следует иметь в виду, что произведение геометрических векторов, в отличие от произведения комплексных чисел не обладает свойством ассоциативности.

Пример 1. Найти квадрат комплексного вектора $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}$.

Вычисляем согласно определению произведения (31):

$$\boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b})=[(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{i}[(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})]=$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2+\boldsymbol{i}2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \qquad (6.6)$$

так как $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{a}|^2$, где $|\boldsymbol{a}|$ – длина вектора, и $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ по свойству 1°скалярного произведения действительных векторов.

Пример 2. Вычислить произведение сопряженных комплексных векторов $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}$ и $\bar{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{a}-i\boldsymbol{b}$.

Вычисляем согласно определению произведения (6.5):

$$\boldsymbol{z}\bar{\boldsymbol{z}}=(\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-i\boldsymbol{b})=[(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{i}[(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})]=$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2 \qquad (6.7)$$

Пример 3. Установить следующее свойство: $\overline{\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2}=\bar{\boldsymbol{z}}_1\bar{\boldsymbol{z}}_2$

Воспользовавшись определением произведения (6.5), запишем выражение комплексно сопряженное $\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2$:

$$\overline{\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2} = [(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) - (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)] - i[(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2]$$

Далее вычислим произведение в правой части предлагаемого равенства:

$$\bar{\boldsymbol{z}}_1\bar{\boldsymbol{z}}_2 = (\boldsymbol{a}_1 - i\boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{a}_2 - i\boldsymbol{b}_2) =$$

$$= [(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) - (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)] + i[-(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) - (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2] =$$

$$= [(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) - (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)] - i[(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2]$$

Из сравнения правых частей полученных выражений следует указанное важное свойство операции комплексного сопряжения и для случая комплексных векторов.

Скалярным произведением комплексных векторов $\boldsymbol{z}_1$и $\boldsymbol{z}_2$ назовем комплексное число, равное произведению комплексных векторов $\boldsymbol{z}_1$ и $\bar{\boldsymbol{z}}_2$. Скалярное произведение комплексных векторов будем обозначать по аналогии с обозначением для вещественных векторов как $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2)$. Таким образом, можем записать

$$(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = \boldsymbol{z}_1\bar{\boldsymbol{z}}_2 \qquad (6.8)$$

Обратим еще раз внимание на то что произведение комплексных векторов в правой части этого равенства следует понимать в смысле определения задаваемого формулой (6.5), а $\bar{\boldsymbol{z}}_2$ вектор, комплексно сопряженный вектору $\boldsymbol{z}_2$.
Поясним присутствие в правой части определения скалярного произведения комплексных векторов комплексно сопряженного второго сомножителя. Напомним, что скалярное произведение действительных векторов обладает свойством 4°. Это свойство положительности скалярного произведения действительного вектора самого на себя, если $\boldsymbol{a}$ – ненулевой вектор, и равенства нулю, если $\boldsymbol{a}$ - нулевой вектор, полезно сохранить и для случая комплексного вектора. Легко убедится, что скалярное произведение (6.8) в силу (6.7), обладает этим свойством, так как

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}\bar{\boldsymbol{z}} = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 \qquad (6.9)$$

Установим далее свойства скалярного произведения комплексных векторов, которые окажутся крайне полезными при преобразованиях выражений, содержащих скалярные произведения, не обращаясь к исходному определению этого произведения:

$\mathbf{1}^\circ$. $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = \overline{(\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_1)}$, т.е. при перестановке сомножителей скалярное произведение комплексных векторов заменяется на комплексно сопряженное число;

$\mathbf{2}^\circ$. $(z\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = z(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2)$

$\mathbf{3}^\circ$. $(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3) = (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_3) + (\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3)$;

$\mathbf{4}^\circ$. $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) > 0$, если $\boldsymbol{z} \neq \widehat{\boldsymbol{o}}$, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = 0$, если $\boldsymbol{z} = \widehat{\boldsymbol{o}}$.

Свойство $\mathbf{4}^\circ$нами уже доказано (6.9). Свойства $\mathbf{1}^\circ \div \mathbf{3}^\circ$ являются простыми следствиями свойств произведения, комплексного сопряжения и определения скалярного произведения комплексных векторов и их доказательство мы опускаем.

Замечание. Следует обратить внимание на тот факт, что

$$(\boldsymbol{z}_1, z\boldsymbol{z}_2) = \bar{z}(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2).$$

Справедливость этого равенства следует из свойств $\mathbf{1}^{\circ}$ и $\mathbf{2}^{\circ}$. Действительно

$$(\boldsymbol{z}_1, z\boldsymbol{z}_2) = \overline{(z\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_1)} = \overline{z(\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_1)} = \bar{z}\,\overline{(\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_1)} = \bar{z}\,(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2)$$

На основании свойства операции комплексного сопряжения, установленного в примере 3, легко установить, что оно остается справедливым и для скалярного произведения комплексных векторов:

$$\overline{(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2)} = (\overline{\boldsymbol{z}}_1, \overline{\boldsymbol{z}}_2)$$

Векторное произведение комплексных векторов

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{b}_1\,,\ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{b}_2,$$

которое будем обозначать символом $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2]$ или $\boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2$, определим как комплексный вектор следующим соотношением:

$$[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] - [(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] + i([\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2] + [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2]) \qquad (6.10.)$$

В правой части находятся векторные произведения геометрических векторов, свойства которых мы напомнили в первом параграфе этой главы. Заметим, что порядок расположения сомножителей важен в силу свойства антикоммутативности векторного произведения. На основе свойств $1^{\circ} \div 4^{\circ}$ векторного произведения действительных векторов нетрудно установить свойства векторного произведения комплексных векторов:

$\mathbf{1}^{\circ}$. $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2] = -[\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_1]$ (свойство антикоммутативности);

$\mathbf{2}^{\circ}$. $[z\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2] = z[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (свойство ассоциативности);

$\mathbf{3}^{\circ}$. $[\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3] = [\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_3] + [\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3]$ (свойство дистрибутивности относительно суммы векторов)

$\mathbf{4}^{\circ}$. $[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}] = \widehat{\boldsymbol{o}}$ для любого вектора $\boldsymbol{z}$.

Первые три предложения примем без доказательств и докажем четвертое свойство.

Пусть $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$. По определению (36.) имеем

$$[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] + i([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]) = \boldsymbol{o} + i([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = \widehat{\boldsymbol{o}}$$

Свойство операции комплексного сопряжения векторного произведения комплексных векторов аналогично свойству этой операции для скалярного произведения:

$$\overline{[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2]} = [\overline{\boldsymbol{z}}_1, \overline{\boldsymbol{z}}_2] \qquad (6.11)$$

В приложении к решению физических задач нам понадобятся перечисленные свойства скалярного и векторного произведений комплексных векторов, которые мы дополним еще следующими:

$$(\boldsymbol{z}_1, \overline{\boldsymbol{z}}_2) + (\overline{\boldsymbol{z}}_1, \boldsymbol{z}_2) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\overline{\boldsymbol{z}}_1, \boldsymbol{z}_2) \qquad (6.12)$$

и

$$[\boldsymbol{z}_1,\overline{\boldsymbol{z}}_2]+[\overline{\boldsymbol{z}}_1,\boldsymbol{z}_2]=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\boldsymbol{z}_1,\overline{\boldsymbol{z}}_2] \qquad (6.13)$$

§7. Представление комплексных векторов в ортонормированном базисе. Выражение операций над комплексными векторами через их компоненты

.

Пусть вещественные векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ заданы в ортонормированном базисе:

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}; \qquad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}; \qquad (7.1)$$

Обратимся к выражению (27) и, с учетом (37), представим его в виде:

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}+i(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \qquad (7.2)$$

Применяя свойства суммы комплексных векторов и произведения комплексного вектора на комплексное число для преобразования правой части (7.2), получим:

$$\boldsymbol{z}=(a_x+ib_x)\boldsymbol{i}+(a_y+ib_y)\boldsymbol{j}+(a_z+ib_z)\boldsymbol{k} \qquad (7.3)$$

Итак, комплексный вектор можно записать в виде линейной комбинации базисных векторов. Коэффициентами разложения в (7.3), т.е. компонентами комплексного вектора являются комплексные числа:

$$z_x=(a_x+ib_x),\ z_y=(a_y+ib_y),\ z_z=(a_z+ib_z).$$

В этих обозначениях запишем разложение комплексного вектора $\boldsymbol{z}$ в виде, аналогичном разложению действительного вектора:

$$\boldsymbol{z}=z_x\boldsymbol{i}+z_y\boldsymbol{j}+\ z_z\boldsymbol{k} \qquad (7.4)$$

Пример 3. В приложениях бывает удобным иное представление комплексного вектора, основанное на показательной форме записи комплексного числа:

$$\boldsymbol{z}=|z_x|e^{i\varphi_x}\boldsymbol{i}+|z_y|e^{i\varphi_y}\boldsymbol{j}+|\ z_z|e^{i\varphi_z}\boldsymbol{k}, \qquad (7.5)$$

здесь $|z_x|,|z_y|,|\ z_z|$ – модули, а $\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z$ – аргументы комплексных компонент вектора $\boldsymbol{z}$.

Формула (7.5) найдет применение в приложении к физическим задачам.

Рассмотрим, как выражаются известные нам операции сложения и умножения на комплексное число над комплексными векторами через их комплексные компоненты в базисе $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$. Имеют место следующие два утверждения.

При сложении комплексных векторов складываются их соответствующие комплексные компоненты.

Действительно, если

$$\boldsymbol{z}_1=z_{1x}\boldsymbol{i}+z_{1y}\boldsymbol{j}+z_{1z}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{z}_2=z_{2x}\boldsymbol{i}+z_{2y}\boldsymbol{j}+z_{2z}\boldsymbol{k},$$

то, на основании свойств суммы комплексных векторов и произведения вектора на комплексное число, легко получить последовательность равенств:

$$\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 = \left(z_{1x}\boldsymbol{i} + z_{1y}\boldsymbol{j} + z_{1z}\boldsymbol{k}\right) + \left(z_{2x}\boldsymbol{i} + z_{2y}\boldsymbol{j} + z_{2z}\boldsymbol{k}\right) =$$

$$= (z_{1x} + z_{2x})\boldsymbol{i} + \left(z_{1y} + z_{2y}\right)\boldsymbol{j} + (z_{1z} + z_{2z})\boldsymbol{k} \qquad (7.6)$$

При умножении комплексного вектора $\boldsymbol{z}$ *на комплексное число* z *все его компоненты умножаются на это число.*

Действительно, если

$$\boldsymbol{z} = \left(z_x\boldsymbol{i} + z_y\boldsymbol{j} + z_z\boldsymbol{k}\right),$$

то, на основании свойств суммы комплексных векторов и произведения вектора на комплексное число, легко установить, что

$$z\,\boldsymbol{z} = z\left(z_x\boldsymbol{i} + z_y\boldsymbol{j} + z_z\boldsymbol{k}\right) = (\,zz_x)\boldsymbol{i} + (\,zz_y)\boldsymbol{j} + \,(\,zz_z)\boldsymbol{k} \qquad (7.7)$$

Выражение скалярного произведения двух комплексных векторов через их координаты.

Пусть комплексные векторы $\boldsymbol{z}_1$и $\boldsymbol{z}_2$ разложены по ортонормированному базису

$$\boldsymbol{z}_1 = z_{1x}\boldsymbol{i} + z_{1y}\boldsymbol{j} + z_{1z}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{z}_2 = z_{2x}\boldsymbol{i} + z_{2y}\boldsymbol{j} + z_{2z}\boldsymbol{k}$$

Докажем, что скалярное произведение двух комплексных векторов, заданных своими разложениями по ортонормированному базису, равно сумме произведений координат первого вектора на соответствующие комплексно сопряженные координаты второго вектора, т.е.

$$(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = z_{1x}\bar{z}_{2x} + z_{1y}\bar{z}_{2y} + z_{1z}\bar{z}_{2z} \qquad (7.8)$$

Доказательство легко провести, опираясь не на исходное определение скалярного произведения двух комплексных векторов, а на основе свойств $\boldsymbol{2}^{\circ}$и $\boldsymbol{3}^{\circ}$**.** этого произведения:

$$(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = \left((z_{1x}\boldsymbol{i} + z_{1y}\boldsymbol{j} + z_{1z}\boldsymbol{k}\right), (z_{2x}\boldsymbol{i} + z_{2y}\boldsymbol{j} + z_{2z}\boldsymbol{k})) =$$

$$\begin{aligned} &= z_{1x}\bar{z}_{2x}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}) + z_{1x}\bar{z}_{2y}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) + z_{1x}\bar{z}_{2z}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}) + \\ &+ z_{1y}\bar{z}_{2x}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}) + z_{1y}\bar{z}_{2y}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}) + z_{1y}\bar{z}_{2z}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) + \\ &+ z_{1z}\bar{z}_{2x}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}) + z_{1z}\bar{z}_{2y}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}) + z_{1z}\bar{z}_{2z}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}) + \end{aligned}$$

Так как базис ортонормированный, т.е.

$$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}) = 1, \qquad (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}) = 0,$$

получим

$$(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = z_{1x}\bar{z}_{2x} + z_{1y}\bar{z}_{2y} + z_{1z}\bar{z}_{2z}.$$

Выражение векторного произведения двух комплексных векторов через их координаты.

Пусть комплексные векторы $\boldsymbol{z}_1$и $\boldsymbol{z}_2$ разложены по ортонормированному базису

$$\boldsymbol{z}_1 = z_{1x}\boldsymbol{i} + z_{1y}\boldsymbol{j} + z_{1z}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{z}_2 = z_{2x}\boldsymbol{i} + z_{2y}\boldsymbol{j} + z_{2z}\boldsymbol{k}$$

Составим векторное произведение

$$[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2] = \left[z_{1x}\boldsymbol{i} + z_{1y}\boldsymbol{j} + z_{1z}\boldsymbol{k}, z_{2x}\boldsymbol{i} + z_{2y}\boldsymbol{j} + z_{2z}\boldsymbol{k}\right].$$

Пользуясь свойствами $\mathbf{1}^{\circ} \div \mathbf{3}$, после очевидных преобразований, получим

$$[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2] = \boldsymbol{i}\left(z_{1y}z_{2z} - z_{1z}z_{2y}\right) - \boldsymbol{j}(z_{1x}z_{2z} - z_{1z}z_{2x}) + \boldsymbol{k}\left(z_{1x}z_{2y} - z_{1y}z_{2x}\right),$$

или, так как выражения в скобках являются определителями второго порядка, имеем

$$[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2] = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} z_{1y} & z_{1z} \\ z_{2y} & z_{2z} \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} z_{1x} & z_{1z} \\ z_{2x} & z_{2z} \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} z_{1x} & z_{1y} \\ z_{2x} & z_{2y} \end{vmatrix}.$$

Правую часть последнего выражения запишем в виде формального определителя третьего порядка, так что

$$[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ z_{1x} & z_{1y} & z_{1z} \\ z_{2x} & z_{2y} & z_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ (a_{\mathbf{1x}} + ib_{\mathbf{1x}}) & (a_{\mathbf{1y}} + ib_{\mathbf{1y}}) & (a_{\mathbf{1z}} + ib_{\mathbf{1z}}) \\ (a_{\mathbf{2x}} + ib_{\mathbf{2x}}) & (a_{\mathbf{2y}} + ib_{\mathbf{2y}}) & (a_{\mathbf{2z}} + ib_{\mathbf{2z}}) \end{vmatrix} \qquad (7.9)$$

глава 3. Приложения комплексных чисел в геометрии и алгебре

§8. Геометрические приложения комплексных чисел

Теория комплексных чисел может быть использована при решении геометрических задач на плоскости; и обратно, факты геометрического характера позволяют доказывать некоторые соотношения и тождества для комплексных чисел.

Пример 1. Пусть $|z_1| = |z_2| = c$. Доказать, что $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4c^2$.

Аналитически доказательство будет выглядеть так:

Поскольку $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, то

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) =$$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) + z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} -$$

$$-(z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z_1}) = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 4c^2.$$

Геометрически этот факт означает, что сумма квадратов длин диагоналей ромба равна сумме квадратов длин всех его сторон (рис. 10).

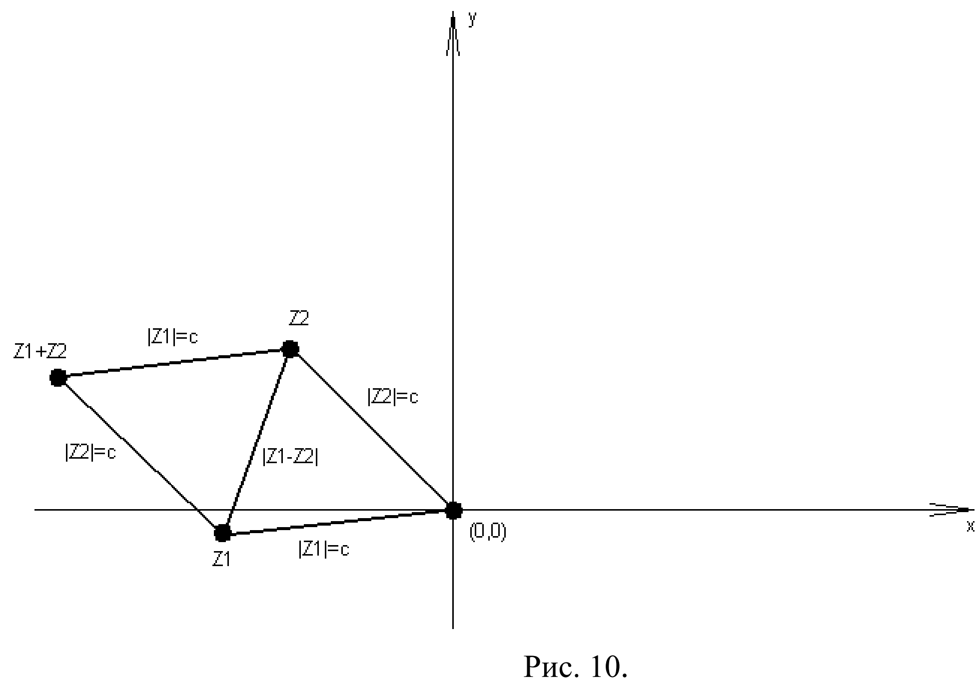

Рис. 10.

Действительно, точки плоскости, соответствующие комплексным числам 0, z_1, z_2 и $z_1 + z_2$, являются вершинами ромба, для которого $|z_1|$ и $|z_2|$ - длины его сторон, а $|z_1 + z_2|$ и $|z_1 - z_2|$ - длины его диагоналей.

Пример 2. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 – различные комплексные числа и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$. Доказать, что $|z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4| = |z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4| + |z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_3|$.

Имеем $|z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4| + |z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_3| = |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| =$

$= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)|$, т. к. число $\dfrac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ вещественно и положительно (докажите это самостоятельно).

Кроме того, имеет место следующее соотношение:

$$|(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| = =$$

$$|- z_1 z_4 - z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_4 z_3| = |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)| = |z_1 - z_3||z_2 - z_4|.$$

Доказанное равенство известно в планиметрии как теорема Птолемея: произведение длин диагоналей выпуклого вписанного в окружность четырехугольника равно сумме попарных произведений длин его противолежащих сторон.

Пример 3. Изобразить на плоскости XOY множество точек $z = x + yi$, удовлетворяющих условию:

1) $|z - i| = 1$;

2) $|z + i| > |z - i|$;

3) $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение.

1) Для каждого z число $|z - i|$ равно расстоянию между точкой z и точкой i. Поэтому заданному условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют те и только те точки, которые лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке (0;1) (рис.11).

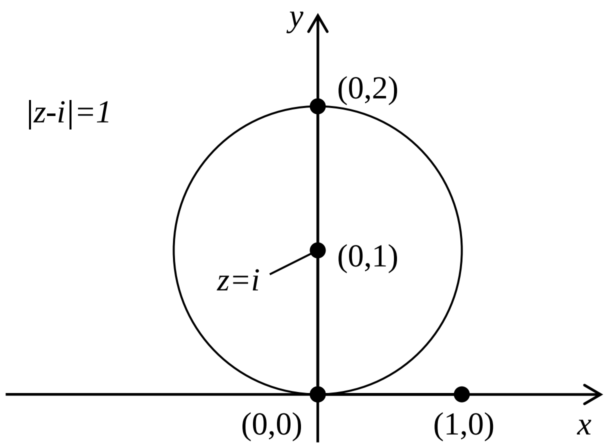

Рис. 11.

2) Пусть $z = x + yi$. Тогда соотношение $|z+i| > |z-i|$ перепишется в виде

$$|x+(y+1)i| > |x+(y-1)i|$$

Так как модуль комплексного числа равен сумме квадратов действительной и мнимой части, то имеем

$$x^2+(y+1)^2 > x^2+(y-1)^2 .$$

Или

$$(y+1)^2 > (y-1)^2 .$$

Перенеся все в левую часть, и применив формулу разности квадратов, получим

$$(y+1-y+1)(y+1+y-1) > 0 .$$

Откуда следует, что $y > 0$, и, следовательно, исходному соотношению удовлетворяют только те комплексные числа, для которых $\operatorname{Im} z > 0$, то есть точки верхней полуплоскости.

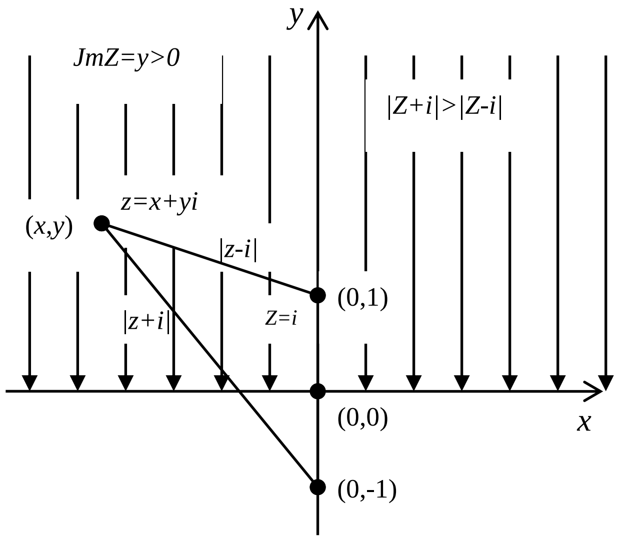

Рис. 12.

Этот ответ можно было получить из геометрических соображений, учитывая, что ось OX есть перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки (0; −1) и (0; 1), восстановленный из его середины (рис. 12).

3) Из определения главного аргумента комплексного числа следует, что множество точек z, удовлетворяющих соотношению $\arg z = \frac{\pi}{3}$, является открытым лучом Oz, образующим угол $\frac{\pi}{3}$ с положительным направлением оси OX (рис.13).

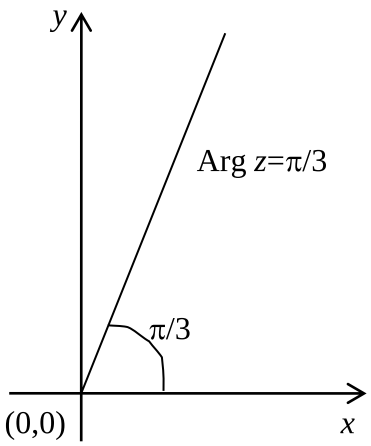

Рис. 13.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дать геометрическую интерпретацию неравенства и выяснить, при каких условиях достигается равенство:

1) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

2) $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$.

2. На комплексной плоскости даны точки $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 - 3i$. Найти все комплексные числа, соответствующие точкам биссектрисы угла $z_1 O z_2$.

3. Если $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ и $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, то точки z_1, z_2 и z_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в единичную окружность. Доказать.

4. Найти множество всех точек комплексной плоскости (и изобразить эти множества), удовлетворяющих условию:

1) $\begin{cases} \arg z = \dfrac{\pi}{6}, \\ \log_{\frac{1}{2}} |z - 1| \ge 0; \end{cases}$

2) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$.

5. Изобразить на комплексной плоскости все точки вида:

1) $1 + 3z - 2i$, если $|z| = 5$;

2) $1 + 2z$, если $|z| = 1$;

3) $3z$, если $|z| = 1$.

§9. Решение алгебраических уравнений с действительными коэффициентами

9.1 *Вводные соображения*

Фундаментальное значение комплексных чисел для алгебры определяется в первую очередь тем, что любое алгебраическое уравнение n – ой степени

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{9.1}$$

с действительными или комплексными коэффициентами имеет ровно n корней (среди которых могут быть и равные). Это утверждение следует из теоремы: **Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.**

Эта теорема является одним из крупнейших достижений всей математики и находит применение в самых различных областях науки, поэтому ее иногда называют *основной теоремой высшей алгебры*.

Так, линейное уравнение $ax + b = 0$,где $a \neq 0$ всегда имеет один действительный корень. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ всегда имеет два корня. Кубическое уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ всегда имеет три корня, и так далее. Значения корней зависит от коэффициентов алгебраического уравнения, они могут быть как действительными, так и комплексными. Для уравнений, степень которых больше единицы, процесс нахождения корней уравнения требует применения операции извлечения корня из числа. Говорят, что всякое алгебраическое уравнение решается в радикалах. Поэтому возникает естественное желание получить универсальные формулы, подставляя в которые значения коэффициентов, мы могли бы находить корни уравнения любой степени. Попытки решить эту задачу предпринимались еще в глубокой древности. Решение задач, приводящихся к частным видам уравнений 2-ой и 3-ей степеней, встречается уже в клинописных текстах древней Вавилонии (2000 лет до н. э.). Впервые изложение теории решения квадратных уравнений было дано Диофантом в его книге «Арифметика» в 3 веке. Значительно позже, только в 16 веке были найдены формулы для решения уравнений 3–ей и 4–ой степеней. Эти формулы были получены итальянскими математиками Кардано и Феррари. В течении почти 300 лет после этого делались безуспешные попытки решить в радикалах уравнение с буквенными коэффициентами 5–ой и более высоких степеней. Наконец, в 1826 году математиком Н. Абелем было доказано, что такое решение в радикалах невозможно.

9.2 *Нахождение корней квадратного уравнения.*

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0, \; p, q \in \mathbf{R}. \qquad (9.2)$$

Из школьного курса математики известно, что при неотрицательном дискриминанте квадратное уравнение имеет два корня, а при отрицательном дискриминанте корней нет. Но основная теорема высшей алгебры утверждает, что алгебраическое уравнение *n*-ой степени всегда имеет ровно *n* корней. В соответствии с этой теоремой квадратное уравнение всегда имеет ровно два корня. Таким образом, из вышесказанного следует:

1) если $D = p^2 - 4q > 0$, то уравнение (9.2) имеет два различных **действительных** корня;

2) если $D = 0$, то уравнение (9.2) имеет два действительных корня, одинаковых по своему значению (или говорят, один корень кратности два),

3) если $D < 0$, то уравнение (9.2) **действительных корней** не имеет, а имеет два **комплексных корня.**

Покажем это.

Вначале рассмотрим случай, когда $p = 0$, $q = 1$, т.е. уравнение

$$x^2 + 1 = 0. \qquad (9.3)$$

Из того, что $i^2 = -1$ следует, что $x_1 = i$ – корень, но т.к. $(-i)^2 = ((-1)i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$, то и $x_2 = -i$ также является корнем уравнения (3).

Покажем, что это уравнение не имеет других корней.

Предположим, что уравнение (9.3) имеет еще корень $x = a + bi$. Тогда должно выполняться равенство $x^2 = -1$, т.е. $(a+bi)^2 = -1$ или $a^2 + 2abi + (bi)^2 = -1$.

В силу равенства комплексных чисел имеем:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases}; \quad \text{т.к. } b \neq 0, \text{ то } a = 0.$$

И тогда $0^2 - b^2 = -1$ или $b = \pm 1$.

Таким образом $x = 0 + (\pm 1)i = \pm i$.

Т. е. мы показали, что уравнение (9.3) других комплексных корней не имеет.

Рассмотрим теперь общий случай уравнения (9.2) с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом. Сделаем замену:

$$x = y - \frac{p}{2} \qquad (9.4)$$

Тогда $x^2 + px + q = 0 \iff \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(y - \frac{p}{2}\right) + q = 0 \iff$

$$\iff y^2 - py + \frac{p^2}{4} + py - \frac{p^2}{2} + q = 0 \iff y^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Т.к. $D<0$, то и $D' = \frac{p^2}{4} - q = \frac{D}{4} < 0$.

Учитывая, что $D'<0$ и что уравнение (9.3) имеет только корни $\pm i$, имеем

$y^2 = D' \;\Leftrightarrow\; y^2 = (-1)|D'| \;\Leftrightarrow\; y = \pm\sqrt{(-1)|D'|} \;\Leftrightarrow\; y = \pm i\sqrt{|D'|}$

(знак $\sqrt{}$ обозначает арифметический корень).

Окончательно, с помощью формулы (9.4) получаем

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{|D'|} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}. \tag{9.5}$$

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Решение. Найдем дискриминант: $\frac{D}{4} = 4 - 13 = -9$, тогда по формуле (9.5), имеем

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i.$$

Пример 2. Решить уравнение $3x^2 - 5x + 4 = 0$.

Решение. Найдем дискриминант $D = 25 - 48 = -23$ и по формуле (9.5) имеем

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{6} = \frac{5 \pm i\sqrt{23}}{6}.$$

Пример 3. Решить уравнение $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 = y$, тогда уравнение примет вид $y^2 + y - 6 = 0$.

Корнями этого уравнения являются $\left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -3 \end{array}\right.$, и, следовательно, корнями исходного

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \\ x_{3,4} = \pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$$

9.3 *Нахождение корней кубических уравнений.*

С нахождением метода решения кубических уравнений связан один из исторических детективных анекдотов – о клятвопреступничестве Кардано.

Любое уравнение третьей степени, с помощью замены переменной, можно привести к виду:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Это уравнение было тщательно исследовано профессором Болонского университета, который в те времена являлся одним из самых больших известных научных центров, ученым Сципионом дель Ферро (умер в 1526 г.). Он никогда не публиковал своих решений и рассказал о них лишь немногим своим друзьям. Но об этом открытии стало известно после его смерти. Венецианский мастер счета, по прозвищу Тарталья (заика), переоткрыл его приемы, но по-прежнему держал их в тайне. Наконец, он раскрыл свои методы ученому из Милана, Иерониму Кардано, который поклялся, что будет хранить их в тайне. Однако, когда Кардано в 1545 г. опубликовал свою книгу по алгебре «Великое исскуство», Тарталья обнаружил, что его метод полностью раскрыт. Завязалась ожесточенная перепалка, в результате которой была доведена до сведения история этого открытия. Сейчас полученное решение известно как формула Кардано, несмотря на то, что авторство принадлежит ученому Тарталья.

В настоящее время формула Кардано и формула Феррари для решения уравнения четвертой степени представляют скорее интересный исторический факт, чем руководство для практических решений, так как являются очень трудоемкими.

Рассмотрим кубическое уравнение

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0. \tag{9.6}$$

С помощью замены $y = x - \dfrac{a}{3}$ уравнение (9.6) сводится к неполному кубическому, т.е. уравнению вида

$$x^3 + px + q = 0. \tag{9.7}$$

Корни этого уравнения и находятся по формулам Кардано

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{9.8}$$

Обозначим первый кубический радикал – α, второй – β, выражение, стоящее под квадратным радикалом – D и назовем его дискриминантом. То есть

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad ;$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Замечание 1.

Т.к. в поле комплексных чисел α и β имеют по три значения, то для $x=\alpha+\beta$ нужно брать не любую их комбинацию, а лишь те, которые дают $\alpha\cdot\beta=-\frac{p}{3}$.

Замечание 2.

Для отыскания всех трех корней кубического уравнения достаточно найти одно любое из трех значений радикала α. Два других значения α получаем умножением этого значения на кубические корни из единицы. Аналогично для значений β.

Замечание 3.

1) Если $D > 0$, то уравнение (9.7) имеет один действительный и два сопряженных комплексных корня. Действительный корень получаем извлечением действительного числа из кубического радикала, а два комплексных – умножением полученного значения на кубические корни из единицы, т.е. на величины

$$u_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) Если $D = 0$, то все корни уравнения (9.7) действительны и два из них равны между собой.

3) Если $D < 0$, то уравнение (9.7) имеет три различных действительных корня.

Пример 1. Решить уравнение: $y^3+3y^2-3y-14=0$.

Делаем замену $y=x-\frac{a}{3}$, т.е. $y=x-1$:

$(x-1)^3+3(x-1)^2-3(x-1)-14=0$,

$x^3-3x^2+3x-1+3x^2-6x+3-3x+3-14=0$,

$x^3-6x-9=0$.

В последнем уравнении $p=-6,\ q=-9$. Тогда, в соответствии с формулой Кардано, имеем:

$$D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{-9}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3=\frac{81}{4}-8=\frac{49}{4}>0.$$

Так как дискриминант больше нуля, то уравнение имеет один действительный корень и два комплексных корня.

Вычислим теперь значения кубических корней α и β: Имеем:

$$\alpha_1=\sqrt[3]{-\frac{-9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}=2,$$

а два других значения корня получаем умножением α_1 на корни третьей степени из единицы, т.е. на величины $u_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, и $u_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Получим:

$$\alpha_2 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}, \quad \alpha_3 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Аналогично вычисляем значения второго корня β.

$\beta_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = 1$, $\beta_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Искомое значение корня уравнения $x_{1,2,3} = \alpha_i + \beta_j$, где $i, j = 1, 2, 3$.

Из условия $\alpha_i \cdot \beta_j = -\frac{p}{3}$ выясняем, какие пары (α_i, β_j) дают значения корня.

$\alpha_1 \cdot \beta_1 = 2 \cdot 1 = -\frac{-6}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 1 + 2 = 3$.

$\alpha_2 \cdot \beta_2 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \neq 2$, следовательно, комбинация $\alpha_2 + \beta_2$ не даст значения корня.

$\alpha_2 \cdot \beta_3 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \alpha_2 + \beta_3 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\alpha_3 \cdot \beta_2 = 2, \quad \Rightarrow \quad x_3 = \alpha_3 + \beta_2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Корни исходного уравнения определяем из соотношения $y = x - 1$.

Окончательно имеем: $y_1 = 2, \quad y_2 = -\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_3 = -\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение: $x^3 - 12x + 16 = 0$.

Здесь $p = -12, \quad q = 16, \quad D = \left(\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3 = 64 - 64 = 0$, следовательно, данное уравнение имеет три действительных корня, причем два из них равны между собой.

Вычисляем α и β:

$\alpha_1 = \sqrt[3]{-8} = -2, \quad \alpha_2 = 1 - i\sqrt{3}, \quad \alpha_3 = 1 + i\sqrt{3}$,

$\beta_1 = \sqrt[3]{-8} = -2, \quad \beta_2 = 1 - i\sqrt{3}, \quad \beta_3 = 1 + i\sqrt{3}$.

Проверяем выполняемость условия $\alpha_i \cdot \beta_j = -\frac{p}{3}$

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 = (-2)(-2) = 4, \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4,$$
$$\alpha_2 \cdot \beta_3 = (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = 4, \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 2,$$
$$\alpha_3 \cdot \beta_2 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) = 4, \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2.$$

Пример 3. Найти куб, объем которого на четыре единицы меньше полусуммы его ребер.

Пусть: x – длина ребра искомого куба

x^3 – искомый объем;

$6x$ – полусумма его ребер, тогда $x^3 + 4 = 6x$ или $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Корни этого уравнения есть решения исходной задачи. Имеем: p=-6, q=4,

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = 4 - 8 = -4 < 0.$$

Следовательно, уравнение имеет три действительных корня.

По формуле Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{-4}}.$$

Извлечем кубические корни $\alpha = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}}$ и $\beta = \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}$.

Для этого представим α и β в тригонометрическом виде.

Имеем:

$$\alpha = \sqrt[3]{2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})}, \quad \alpha_k = \sqrt[3]{\sqrt{8}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}),$$

$k = 0, 1, 2.$

$$\alpha_0 = \sqrt[6]{8}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i,$$

$$\alpha_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$\alpha_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

$\beta = \sqrt[3]{2\sqrt{2}(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4})}$, следовательно

$\beta_l = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{-3\pi}{4} + 2\pi l}{3} + i\sin\frac{\frac{-3\pi}{4} + 2\pi l}{3})$, где l = 0, 1, 2.

$$\beta_0 = \sqrt{2}\ (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - i,$$

$$\beta_1=\sqrt{2}(\cos\frac{-\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$\beta_2=\sqrt{2}(\cos\frac{-\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}-i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Условию $\alpha_k\cdot\beta_l=-\frac{p}{3}$ отвечает: $\alpha_0\cdot\beta_0=2$, $\alpha_1\cdot\beta_2=2$ и $\alpha_2\cdot\beta_1=2$.

Таким образом: $x_1=\alpha_0+\beta_0=1+i+1-i=2$,

$$x_2=\alpha_1+\beta_2=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}-i\frac{\sqrt{3}-1}{2}=-\sqrt{3}-1,$$

$$x_3=\alpha_2+\beta_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\sqrt{3}-1.$$

Условию задачи отвечают два куба, ребра которых равны 2 и $\sqrt{3}-1$.

9.4 *Нахождение корней уравнения четвертой степени*

Для уравнения четвертой степени:

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0 \qquad (9.9)$$

существует формула (*формула Феррари*), позволяющая с помощью радикалов найти точные значения корней уравнения, она получается из *метода Феррари*. Суть этого метода состоит в том, что решение уравнения (9.9) сводится к решению одного кубического и двух квадратных уравнений. Для этого предварительно уравнение (9.9) с помощью подстановки $y=x-\frac{a}{4}$ приводится к уравнению вида

$$x^4+px^2+qx+r=0, \qquad (9.10)$$

не содержащего члена с x^3.

Затем вводят вспомогательный параметр α, так, чтобы левая часть уравнения (9.10) тождественно преобразовалась к виду

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2+qx+r-\frac{p^2}{4}-\alpha^2-2\alpha x^2-p\alpha,$$

или

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left[2\alpha x^2-qx+(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4})\right]=0. \qquad (9.11)$$

После чего подбирается значение α так, чтобы выражение в квадратных скобках было полным квадратом, то есть дискриминант квадратного трехчлена должен быть равен нулю.

Это условие дает для α кубическое уравнение

$$q^2 - 4 \cdot 2\alpha\left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0. \qquad (9.12)$$

Это уравнение относительно неизвестного α с комплексными коэффициентами имеет три комплексных корня. Пусть α_0 будет один из них; он выражается по формуле Кардано через коэффициенты уравнения (9.11), и, соответственно через коэффициенты уравнения (9.10).

При $\alpha = \alpha_0$ многочлен в квадратных скобках имеет один двукратный корень

$$x_0 = \frac{q}{4\alpha_0},$$

поэтому уравнение (9.11), после применения формулы разности квадратов, распадется на два квадратных уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - \sqrt{2\alpha_0}\,x + \left(\dfrac{p}{2} + \alpha_0 + \dfrac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0, \\ x^2 + \sqrt{2\alpha_0}\,x + \left(\dfrac{p}{2} + \alpha_0 - \dfrac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0. \end{array}\right. \qquad (9.13)$$

Так как от исходного уравнения к последней совокупности мы пришли при помощи тождественных преобразований, то корни уравнений совокупности (9.13) являются корнями исходного уравнения. Легко увидеть, что эти корни выражаются через коэффициенты при помощи радикалов. Однако эти формулы имеют столь громоздкий вид, что практически являются бесполезными.

В то время как методами решения квадратных уравнений владели еще древние греки, открытие изложенных выше методов решения уравнений третьей и четвертой степени относится к шестнадцатому веку. После этого почти три столетия продолжались безуспешные попытки найти формулы, выражающие при помощи радикалов корни любого уравнения пятой степени через его коэффициенты. Эти попытки прекратились лишь после того, как Абель в двадцатых годах девятнадцатого века доказал, что такие формулы для уравнений n-ой степени при любом $n \geq 5$ не существуют.

Однако это не означает, что корни уравнения n-ой степени, где $n \geq 5$ не могут быть найдены. Действительные корни таких уравнений легко определяются приближенными методами (Ньютона, итераций и др.).

Отдельные виды уравнений также могут быть решены алгебраическими методами, например, биквадратные и другие, приводимые к квадратному уравнению. Также уравнения высших степеней могут быть решены при помощи разложения их на множители, с последующим расщеплением на более простые уравнения.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

1. $x^2 + x + 1 = 0$.
2. $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$.
3. $x^2 + 3x + 4 = 0$.
4. $x^3 - 27 = 0$.
5. $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$.
6. $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$.
7. $x^3 - 6x + 9 = 0$.
8. $x^3 + 6x + 2 = 0$.
9. $x^3 + 24x - 56 = 0$.
10. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.
11. $x^3 + 9x - 26 = 0$.
12. $x^3 - 4x + 2 = 0$.
13. $x^3 + 18x + 15 = 0$.
14. $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$.
15. $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$.

глава 4. приложения комплексных чисел и векторов к физическим задачам

§10. Исследование периодических процессов в электрических цепях

10.1 *Вводные соображения*

При исследовании широкого круга процессов, имеющих периодический характер, применение математического аппарата комплексных выражений в значительной мере упрощает технику решения уравнений, описывающих эти явления, а также анализ полученных результатов [8].

На ряде примеров физического характера мы продемонстрируем эффективность метода представления величин в комплексной форме для частных случаев гармонических колебаний (синусоидально-периодических) и периодически затухающих процессов.

В простейшем варианте суть обсуждаемого метода заключается в следующем. Пусть переменная t есть время и рассмотрим действительное выражение

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad (10.1),$$

описывающее в прикладных задачах периодический процесс синусоидального типа с амплитудой A_0, циклической (круговой частотой) ω и начальной фазой φ. ($A_0 > 0$ по определению амплитуды; ω, φ - действительные числа). Параллельно с этим выражением запишем комплексное выражение $\tilde{A}(t)$ в показательной форме

$$\tilde{A}(t) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \qquad (10.2),$$

где $A_{0,}$ ω, φ имеют тот же смысл, что и в выражении (1).

Из сопоставления выражений (10.1) и (10.2), имея в виду формулу Эйлера (4.21), приходим к выводу, что:

$$A(t) = \mathrm{Re}\tilde{A}(t) \qquad (10.3).$$

Предположим далее, что характер процесса допускает замену действительного выражения $A(t)$ на комплексное $\tilde{A}(t)$, а сам процесс описывается, например, линейным обыкновенным дифференциальным уравнением или уравнением в частных производных с постоянными коэффициентами.

Упрощение расчетов проявляется в том, что результат взятия производной по переменной времени от экспоненты не приводит к новой функциональной форме, в то время как косинус и синус меняют свою форму, что существенно усложняет вычисления.

Подчеркнем, что непосредственное физическое значение имеет, конечно, лишь вещественная часть комплексного выражения $\tilde{A}(t)$. Однако мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что вещественная (действительная) часть результатов, являющихся следствием **линейных** операций над комплексными выражениями, **совпадает** с результатами выполнения **этих операций** над одними лишь действительными частями исходных выражений.

Поэтому переход к вещественной части комплексных выражений, которой мы только и будем приписывать физический смысл, может быть совершен как до, так и после выполнения линейных операций.

При нелинейных операциях переход к действительным выражениям необходимо совершать до выполнения над ними этих операций, так как действительная часть, например произведения, **не равна** произведению их вещественных частей. Примеры нелинейных операций будут рассмотрены в дальнейшем.

Вернемся к выражению (10.2) и запишем его в несколько ином виде:

$$\tilde{A}(t) = A_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \tilde{A}_0 e^{i\omega t} \qquad (10.4)\ .$$

Величина $\tilde{A}_0 = A_0 e^{i\varphi}$ является в общем случае комплексной и называется комплексной амплитудой, а сам метод перехода к комплексным выражениям методом комплексных амплитуд.

При рассмотрении задач, в которых процессы описываются действительными векторными величинами, примем для их обозначения жирный шрифт. Например, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$. а для обозначений соответствующих им комплексных векторов воспользуемся дополнительным знаком ~ $(\widetilde{\boldsymbol{v}}, \widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{E}}, \widetilde{\boldsymbol{H}})$, как и в случае скалярных величин (10.4).

10.2 *Вынужденные колебания тока и напряжения в электрической цепи*

Пусть в замкнутую цепь тока с сопротивлением R и катушкой индуктивности L включен источник переменной электродвижущей силы, являющейся заданной функцией времени

$$E(t) = E_0 \cos \omega t. \qquad (10.5)$$

Уравнение, описывающее процесс изменения тока $I = I(t)$ в приближении квазистационарного тока имеет вид:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \qquad (10.6)$$

и является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Найдем вид установившихся вынужденных колебаний тока под действием вынуждающей электродвижущей силы (10.5).

Воспользуемся методом комплексных амплитуд и положим:

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}_0 e^{i\omega t} \qquad (10.7).$$

$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t} \qquad (10.8)$$

Из сравнения (10.1) и (10.5) следует, что в данном частном случае $\varphi = 0$ и комплексная амплитуда

$$\tilde{E}_0 = E_0 \qquad (10.9)$$

есть величина действительная.

Внося выражения (10.7), (10.8) в (10.6), производя дифференцирование и сокращая на множитель $e^{i\omega t}$, придем к алгебраическому уравнению для комплексной амплитуды тока $\tilde{I}_0$:

$$i\omega L\tilde{I}_0 + R\tilde{I}_0 = \tilde{E}_0 = E_0, \qquad (10.10.)$$

,

здесь мы учли равенство (10.9).

Из последнего уравнения находим, что

$$\tilde{I}_0 = \frac{E_0}{R+i\omega L} \qquad (10.11).$$

Далее, подставляя (1.7) в (1.4), находим величину комплексного тока

$$\tilde{I}(t) = \frac{E_0}{R+i\omega L} e^{i\omega t} \qquad (10.12)$$

Осталось вычислить действительную часть полученного выражения, которая и определяет реальный ток в цепи. Действуя в соответствии с правилами умножения (2.7) и деления (2.9), после простых преобразований получим:

$$I(t) = \mathrm{Re}\tilde{I}(t) = \frac{E_0}{R^2+\omega^2 L}(R\cos\omega t + \omega L \sin\omega t) \qquad (10.13)$$

(1.5).

Можно поступить иначе, а именно, представить знаменатель в (10.12) в показательной форме согласно формуле (4.22):

$$R + i\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{i\varphi} \qquad (10.14)$$

где аргумент φ комплексного выражения (10.14) определяется в соответствии с (3.12) одной из следующих формул:

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}; \ \sin\varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}; \ \tan\varphi = \frac{\omega L}{R} \qquad (10.15)$$

а выражение (10.12) для комплексного тока примет вид:

$$\tilde{I}(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} e^{i(\omega t - \varphi)} \qquad (10.16)$$

Действительная часть теперь легко находится и равна:

$$I(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \qquad (10.17)$$

здесь φ определяется одним из выражений (10.15). Форма записи в виде (10.17) в приложениях является предпочтительной. Воспользовавшись понятием амплитуды колебания тока I_0, которая определяется равенством

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

запишем (10.17) в виде:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

10.3 *Мгновенная и средняя потребляемая мощность в электрической цепи*

Пример N2. Рассмотрим вопрос о потребляемой в цепи мгновенной $N(t)$ и средней мощности N, т.е. работе источника электродвижущей силы, отнесенной к единице времени.

Интересующая нас мгновенная мощность равна произведению электродвижущей силы в момент времени t на величину тока в тот же момент времени:

$$N(t) = E(t)I(t) = \mathrm{Re}\tilde{E}(t) \cdot \mathrm{Re}\tilde{I}(t) \tag{10.18}$$

Операция произведения нелинейная. Поэтому, как уже отмечалось, следует перейти к действительным частям соответствующих сомножителей; это и отражено в предыдущей формуле.

Легко убедится, используя (10.7) и (10.9). что

$$\mathrm{Re}\tilde{E}(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{E}_0 e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(E_0 e^{i\omega t}\right) =.E_0 \cos \omega t \tag{10.19}$$

Действительная часть тока найдена нами ранее и определяется выражением (10.17). После подстановки (10.17) и (10.19) в (10.18), получим искомое выражение мгновенной мощности источника электродвижущей силы:

$$N(t) = \frac{{E_0}^2}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \cos \omega t \, \cos(\omega t - \varphi) \tag{10.20}$$

В электротехнике обычно интересуются средним значением мощности N за время, равное периоду колебания, который обозначим как T. Согласно определению средней мощности запишем:

$$N = \frac{1}{T}\int_0^T N(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{{E_0}^2}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \cos \omega t \, \cos(\omega t - \varphi)\, dt \tag{10.21}$$

Интеграл легко вычисляется, учитывая что:

$$\cos \omega t \, \cos(\omega t - \varphi) = (\cos \omega t)^2 \cos \varphi + \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi$$

и так как средние значения за период квадрата косинуса и произведения косинуса на синус равны соответственно $\frac{1}{2}$ и нулю, то средняя потребляемая за период мощность равна:

$$N = \frac{{E_0}^2}{2\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \cos \varphi = \frac{1}{2} E_0 I_0 \cos \varphi$$

§11. Движение заряда и осциллятора в постоянном однородном магнитном поле

11.1 *Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле*

Рассмотрим вопрос о характере движения *заряда* e под действием постоянного во времени однородного магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Как известно, на заряд, движущийся со скоростью $\boldsymbol{v}$, действует сила Лоренца

$$\boldsymbol{F}_{\text{л}} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}],$$

Здесь c константа скорости света. Мы ограничимся нерелятивистским случаем, когда скорость заряда $v \ll c$. Подставляя для этого случая во второй закон Ньютона, записанный в виде

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

выражение для силы Лоренца, получаем уравнение движения в векторной форме

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}] \tag{11.1}$$

Для решения этого уравнения перейдем к его координатной записи, выбрав в качестве оси z направление магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Вектор скорости и поля в координатной форме примут вид

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{11.2}$$

$$\boldsymbol{H} = o\boldsymbol{i} + o\boldsymbol{j} + H\boldsymbol{k} \tag{11.3}$$

где $H = |\boldsymbol{H}|$.

Далее, действуя по правилам вычисления векторного произведения, находим

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ o & o & H \end{vmatrix} = v_yH\boldsymbol{i} - v_xH\boldsymbol{j} + o\boldsymbol{k} \tag{11.4}$$

Собирая вместе (11.1), (11.2) и (11.4), и приравнивая компоненты при одинаковых базисных векторах, получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций v_x, v_y, v_z следующего вида

$$m\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{c}v_yH, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -\frac{e}{c}v_xH, \quad m\frac{dv_z}{dt} = o \tag{11.5}$$

Для более компактной записи системы уравнений (11.5) обозначим производные по времени точкой и введем параметр

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \tag{11.6.}$$

В результате система уравнений (11.5) примет форму

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \qquad \dot{v}_y = -\omega v_x, \qquad \dot{v}_z = o \tag{11.7}$$

Для решения системы уравнений (11.7) воспользуемся искусственным приемом. Умножим второе уравнение на мнимую единицу i и сложим с первым уравнением:

$$\dot{v}_x + i\dot{v}_y = \omega v_y - i\omega v_x. \tag{11.8}$$

В силу равенства

$$\omega v_y - i\omega v_x = -i\omega(v_x + iv_y)$$

уравнение (11.8) принимает особенно простой вид

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y). \tag{11.9}$$

Введем функцию $u = v_x + iv_y$, удовлетворяющую, как следует из (11.9), уравнению

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt} = -i\omega,$$

откуда, интегрируя обе части, имеем $u = Ce^{-i\omega t}$, где C - комплексная постоянная интегрирования. Следовательно

$$v_x + iv_y = Ce^{-i\omega t}. \qquad (11.10)$$

Константу интегрирования C запишем в показательной форме $C = |C|e^{-i\varphi}$, где $\varphi -$ действительное число. В результате получим, что

$$v_x + iv_y = |C|e^{-i(\omega t+\varphi)} \qquad (11.11)$$

Приравняем действительные и мнимые части (11.11):

$$v_x = |C|\cos(\omega t + \varphi), \qquad v_y = -|C|\sin(\omega t + \varphi). \qquad (11.12)$$

Из третьего уравнения (11.7) приходим к выводу о постоянстве составляющей скорости вдоль оси z, т.е.

$$v_z = v_{oz}, \qquad (11.13)$$

где $v_{oz} -$ константа интегрирования, имеющая смысл проекции начальной скорости на ось z.

Для определения зависимости координат движущегося заряда от времени следует проинтегрировать уравнения (11.12), (11.13):

$$x = x_o + \frac{|C|}{\omega}\sin(\omega t + \varphi), \quad y = y_o + \frac{|C|}{\omega}\cos(\omega t + \varphi), \quad z = z_o + v_{oz}t \qquad (11.14)$$

Выясним смысл константы интегрирования $|C|$ в выражении (11.12). Возведем в квадрат эти равенства и сложим их левые и правые части:

$$v_x^2 + v_y^2 = |C|^2 \qquad (11.15)$$

Откуда $|C| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и имеет смысл абсолютной величины скорости в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Введем для нее обозначение v_{ot}. И так как $v_{ot} = |C|$, то скорость заряда в плоскости x, y остается неизменной.

Кинетическая энергия частицы

$$K = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_y^2\right) = \frac{m}{2}(v_{ot}^2 + v_{oz}^2),$$

при движении в магнитном поле остается, следовательно, постоянной. (Заметим, что этот вывод очевидно следует из теоремы об изменении кинетической энергии).

Выясним далее вид траектории движения заряда. С одной стороны из уравнений (11.14) видно, что

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \frac{|C|^2}{\omega^2} = \frac{v_{ot}^2}{\omega^2}; \qquad (11.16.)$$

с другой стороны из (11.7)

$$z = z_o + v_{oz}t. \qquad (11.17)$$

Следовательно, частица движется по винтовой линии, радиус которой равен $\frac{v_{ot}}{\omega}$, а ось направлена вдоль магнитного поля.

Параметр

$$\omega = \frac{eH}{mc}, \qquad (11.18)$$

как видно из уравнений (11.14), имеет смысл циклической частоты вращения заряда в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю.

11.2 *Движение осциллятора в постоянном однородном магнитном поле*

Рассмотрим теперь вопрос определения частоты колебаний пространственного *осциллятора,* помещенного в однородное магнитное поле; собственная частота колебаний осциллятора в отсутствии поля равна ω_o.

Пусть $\boldsymbol{r} -$ радиус вектор положения осциллятора; упругая сила, действующая на осциллятор, равна $(-k\boldsymbol{r})$, действие магнитного поля, как и в предыдущей задаче, равно силе Лоренца. Применяя второй закон Ньютона, запишем векторное уравнение движения осциллятора

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\boldsymbol{r} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}]. \qquad (11.19)$$

($\ddot{\boldsymbol{r}} -$ вектор ускорения, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}\ -$ вектор скорости). Разделим обе части на m и введем параметр ω_o такой, что

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m}.$$

В результате этих действий уравнение (11.19) примет вид:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_o^2\boldsymbol{r} = \frac{e}{mc}[\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{H}]. \qquad (11.20)$$

Для решения этого уравнения перейдем к его координатной записи, выбрав в качестве оси z направление магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Воспользовавшись выражениями (11.2),(11.3),(11.4),(11.20), получим уравнения вынужденных колебаний осциллятора в магнитном поле:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = \frac{eH}{mc}\dot{y}, \qquad \ddot{y} + \omega_o^2 y = -\frac{eH}{mc}\dot{x},, \qquad \ddot{z} + \omega_o^2 z = o \qquad (11.21)$$

Воспользуемся приемом решения предыдущей задачи: умножим второе уравнение на мнимую единицу и сложим с первым уравнением. В результате для функции

$$u = x + iy$$

получим уравнение

$$\ddot{u} + \omega_o^2 u = -i\frac{eH}{mc}\dot{u} \qquad (11.22)$$

Для определения частот колебаний ω в плоскости x, y ищем решение в виде $u = ae^{-i\omega t}$. Подставим предполагаемый вид решения в (11.22). После сокращения на множитель $ae^{-i\omega t}$ придем к квадратному уравнению

$$\omega^2 - \frac{eH}{mc}\omega - \omega_o^2 = o$$

§12. Плоская электромагнитная волна

12.1 *Поляризованная монохроматическая плоская электромагнитная волна*

Важным частным случаем электромагнитных волн являются плоские монохроматические волны. Поле такой волны является простой периодической функцией от $\omega t - \vec{k}\vec{r}$. Величина ω называется циклической частотой волны (далее просто частота). Вектор $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$, где $\vec{n}$ - единичный вектор в направлении распространения волны, c скорость волны. Будем для определенности рассматривать вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ для случая поляризованной волны и остановимся на вопросе *комплексной формы его представления*, которая широко используется в электродинамике при решении задач на основе уравнений Максвелла. Все сказанное ниже относительно электрического поля полностью относится и к магнитному полю $\boldsymbol{H}$ электромагнитной волны.

Напомним, что электромагнитная волна называется поляризованной, если направления колебаний вектора поля $\boldsymbol{E}$ *упорядочены* каким либо образом.

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных электрических колебания, совершающихся вдоль векторов $\vec{\boldsymbol{a}}_1$ и $\vec{\boldsymbol{a}}_2$.

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{a}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \tag{12.1}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{a}_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \tag{12.2}$$

Здесь α начальная фаза колебаний волны. Суммарный вектор напряженности электрического поля волны $\boldsymbol{E}$, приняв во внимание выражения для его слагаемых (12.1),(12.2), представим в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{a}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) + \boldsymbol{a}_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \tag{12.3}$$

Введем обозначение:

$$\beta = \omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha \tag{12.4}$$

Напомним, что наша задача состоит в том, чтобы записать выражение для векторного поля $\boldsymbol{E}$ в виде вещественной части некоторого комплексного выражения $\widetilde{\boldsymbol{E}}$. С этой целью и займемся преобразованием выражения (12.3):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_1 \cos\beta + \boldsymbol{a}_2 \sin\beta = \boldsymbol{a}_1 \mathrm{Re}\, e^{i\beta} + \boldsymbol{a}_2 \mathrm{Im}\, e^{i\beta} \tag{12.5}$$

Воспользуемся далее тем, что

$$\mathrm{Re}\, e^{i\beta} = \mathrm{Re}\, e^{-i\beta}, \quad \mathrm{Im}\, e^{i\beta} = \mathrm{Re}\, ie^{-i\beta}, \qquad (12.6.)$$

Вернемся к преобразованию выражения (12.5) для вещественного вектора напряженности электрического поля и, учитывая (12.6.), запишем его на основании свойства $\mathbf{5}^{\circ}$ произведения (6.4) в следующем виде:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_1 \mathrm{Re}\, e^{-i\beta} + \boldsymbol{a}_2 \mathrm{Re}\, ie^{-i\beta} = \mathrm{Re}\big(\boldsymbol{a}_1 e^{-i\beta} + \boldsymbol{a}_2\, ie^{-i\beta}\big) =$$

$$= \mathrm{Re}\{(\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2)\, e^{-i\beta}\} \qquad (12.7)$$

Заметим, что при переходе от первого равенства ко второму мы приняли во внимание вещественность векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$.

Введем в рассмотрение комплексный вектор $\widetilde{\boldsymbol{a}}$, определив его равенством:

$$\widetilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2 \qquad (12.8)$$

Возвращаясь к исходным обозначениям (12.4) и учитывая (12.8), приведем выражение (12.7) к следующей форме:

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\left\{\widetilde{\boldsymbol{a}}\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\widetilde{\boldsymbol{a}}\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha)}\right\} \qquad (12.9)$$

Следует обратить внимание на противоположные знаки комбинаций $(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$ в выражениях (12.3) и (12.9).

В приложениях удобно выделять множитель $e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ в последнем выражении, и записывать его как:

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\left\{\widetilde{\boldsymbol{a}}\, e^{-i\alpha} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right\} \qquad (12.10)$$

Вполне естественно теперь определить понятие комплексной амплитуды $\widetilde{\boldsymbol{E}}_o$ волны равенством:

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_o = \widetilde{\boldsymbol{a}}\, e^{-i\alpha}, \qquad (12.11)$$

а комплексное выражение для напряженности электрического поля $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ выражением, стоящим под знаком вещественной части в (12.10):

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \widetilde{\boldsymbol{a}}\, e^{-i\alpha} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \widetilde{\boldsymbol{E}}_o\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \qquad (12.12)$$

Как $\widetilde{\boldsymbol{E}}$**,** так и $\widetilde{\boldsymbol{E}}_o$ являются, вообще говоря, комплексными векторными величинами.

Следовательно, если комплексное выражение (12.12) для напряженности электрического поля найдено (как решение уравнений электродинамики), то действительный вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ вычисляется согласно правилу:

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\widetilde{\boldsymbol{E}} = \mathrm{Re}\left\{\widetilde{\boldsymbol{E}}_o\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right\} \qquad (12.13)$$

Для удобства дальнейших обсуждений приведем здесь также выражение для комплексной амплитуды волны (12.11) в развернутом виде:

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_o = (\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2)\; e^{-i\alpha} \qquad (12.14)$$

Цикл задач, связанных с распространением плоских монохроматических волн, весьма широк и отыскание решений в форме (12.12) оказывается часто используемым приемом.

Так, в задачах, описываемых линейными уравнениями в частных производных, находят решения для векторов электромагнитных волн $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ и проводят анализ их свойств в виде комплексных выражений (12.12). После их подстановки в упомянутые уравнения, последние сводятся к системе алгебраических уравнений относительно постоянных комплексных амплитуд (что приводит к существенно более простой задаче).

Предположим, что эта часть задачи решена, т.е. найдена, например, комплексная амплитуда электрического поля $\widetilde{\boldsymbol{E}}_o$ и требуется проанализировать вопрос о *направлении* поля монохроматической волны.

Геометрический и физический смысл векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ понятен из их определения выражениями (12.1),(12.2). В тоже время знание этих векторов позволяет полностью решить вопрос о *направлении* поля монохроматической волны.

Именно поэтому следующим шагом вычислений является решение векторного уравнения (12.14) относительно неизвестных $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ по известной комплексной амплитуде электрического поля $\widetilde{\boldsymbol{E}}_o$. Это отдельная задача, которую мы рассмотрим ниже в пункте 12.2, а сейчас предположим, что векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ известны.

До этого момента все наши рассуждения не были связаны с какой либо конкретной системой координат. Введем *правую* систему координат $\{x, y, z\}$ и единичные базисные векторы $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\jmath}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$. Направим ось z вдоль распространения волны (параллельно вектору $\vec{k}$). Ось x по направлению вектора $\boldsymbol{a}_1$. Направление оси y определится при этом однозначно, а вектор $\boldsymbol{a}_2$ может оказаться направленным как в положительном, так и в отрицательном направлении оси y. Обозначим длины векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ через a_1, a_2 соответственно и представим их в виде:

$$\boldsymbol{a}_1 = a_1\vec{\boldsymbol{\imath}}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \pm a_2\vec{\boldsymbol{\jmath}} \tag{12.15}$$

Знак ($\pm$) отражает отмеченные две возможности направления вектора $\boldsymbol{a}_2$ относительно направления оси y. Величины a_1, a_2 неотрицательные.

Обратимся к выражению для вектора электрического поля волны (12.3) и, в соответствии с (12.15), запишем в виде:

$$\boldsymbol{E} = a_1\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)\,\vec{\boldsymbol{\imath}} \pm a_2\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (12.16.)$$

Из этого выражения легко определяются проекции E_x, E_y вектора $\boldsymbol{E}$:

$$E_x = a_1\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \tag{12.17}$$

$$E_y = \pm a_2\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \tag{12.18}$$

или:

$$\frac{E_x}{a_1} = \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \qquad \frac{E_y}{a_2} = \pm\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \tag{12.19}$$

Из (12.19) видно, что:

$$\frac{E_x^2}{a_1^2} + \frac{E_y^2}{a_2^2} = 1 \tag{12.20}$$

Из (12.17),(12.18) следует, что вектор электрического поля в каждой точке пространства вращается в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, с угловой скоростью ω, а конец вектора описывает, согласно (12.20), *эллипс*. Волна, обладающая таким свойством, называется *эллиптически поляризованной*. Длины полуосей эллипса поляризации равны a_1, a_2, а направления осей определяют векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$.

Направление вращения определяется знаком (12.18). Напомним, что нами была выбрана правая система координат. При положительном знаке в (12.19) вращение происходит против хода, при отрицательном по ходу часовой стрелки, если наблюдать процесс вращения из конца базисного вектора $\vec{\boldsymbol{k}}$.

Если $a_1 = a_2$, то конец вектора $\boldsymbol{E}$ опишет окружность. Т.е. вектор $\boldsymbol{E}$ вращается, оставаясь постоянным по длине. В этом случае говорят, что *волна поляризована по кругу*.

Разложение комплексного вектора по базисным векторам (7.4) в нашем случае имеет вид

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_o=\tilde{E}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{E}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}}.$$

Подставим это выражение и (12.15) в левую и правую части равенства (12.14) соответственно:

$$\tilde{E}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{E}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} = (a_1\vec{\boldsymbol{\imath}} \pm ia_2\vec{\boldsymbol{\jmath}})\ e^{-i\alpha},$$

из которого следует, что

$$\tilde{E}_{0x} = a_1\, e^{-i\alpha}, \qquad \tilde{E}_{0y} = \pm ia_2\, e^{-i\alpha}.$$

В частном случае круговой поляризации, когда $a_1 = a_2$, для отношения составляющих комплексной амплитуды получим

$$\frac{\tilde{E}_{0y}}{\tilde{E}_{0x}} = \pm i$$

При положительном знаке в правой части равенства вращение происходит против хода, при отрицательном по ходу часовой стрелки, если наблюдать процесс вращения из конца базисного вектора $\vec{\boldsymbol{k}}$.

Если a_1 или a_2 равно нулю, то поле волны направлено во всех точках пространства параллельно или антипараллельно одному и тому же направлению. В этом случае волну называют *линейно поляризованной.*

12.2 *Определение параметров поляризации волны по комплексной амплитуде*

Под параметрами поляризации волны понимаются параметры, определяющие направление и величину осей эллипса поляризации. Задача состоит в том, чтобы найти значения параметров поляризации по комплексной амплитуде $\widetilde{\boldsymbol{E}}_o$ монохроматической плоской волны. При рассмотрении этой задачи мы сохраним всю систему обозначений предыдущего пункта. Далее, согласно полученным там результатам, длины полуосей эллипса поляризации равны длинам a_1, a_2 ортогональных векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$.

Обратимся к соотношению (12.14), которое устанавливает связь между $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и комплексной амплитуде $\widetilde{\boldsymbol{E}}_o$:

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_o = =(\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2)\, e^{-i\alpha} \qquad (12.21)$$

и найдем уравнения для определения интересующих нас величин a_1, a_2.

Комплексный вектор $\tilde{\boldsymbol{E}}_o$,в силу (7.4), запишем через его составляющие $\tilde{E}_{0x}, \tilde{E}_{0y}$ в виде:

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_o=\tilde{E}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{E}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} \tag{12.22}$$

(Заметим, что $\tilde{E}_{0x}$ и $\tilde{E}_{0y}$ - это комплексные числа). Поставив (12.22) в левую часть (12.21), получим:

$$\tilde{E}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{E}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} =(\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2)\ e^{-i\alpha} \tag{12.23}$$

Выражение, комплексно сопряженное выражению (12.23), равно:

$$\bar{\tilde{E}}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \bar{\tilde{E}}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} =(\boldsymbol{a}_1 - i\boldsymbol{a}_2)\ e^{i\alpha}, \tag{12.24}$$

где черта означает знак комплексного сопряжения.

Далее рассмотрим скалярное произведение векторного равенства (12.23) самого на себя:

$$(\tilde{E}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{E}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}}, \tilde{E}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{E}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}}) =((\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2)\ e^{-i\alpha}, (\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2)\ e^{-i\alpha}) \quad ,$$

и, воспользовавшись определением (6.8), будем иметь

$$(\tilde{E}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{E}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}})(\bar{\tilde{E}}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \bar{\tilde{E}}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}}) = (\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2)\, e^{-i\alpha}(\boldsymbol{a}_1 - i\boldsymbol{a}_2)\ e^{i\alpha} \tag{12.25}$$

Учитывая (7.8) и ортогональность векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, из (12.25) получаем:

$$|\tilde{E}_{0x}|^2 + |\tilde{E}_{0y}|^2 = a_1^2 + a_2^2\ , \tag{12.26.}$$

где $|\tilde{E}_{0x}|, |\tilde{E}_{0y}|$ – модули комплексных величин $\tilde{E}_{0x}, \tilde{E}_{0y}$ соответственно. Тем самым мы установили вид одного из уравнений. Чтобы вывести второе уравнение, перемножим в смысле векторного произведения левые и правые части выражений (12.23),(12.24) в том порядке, как они записаны (порядок важен, учтем также, что система координат правая):

$$(\tilde{E}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{E}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}}) \times (\bar{\tilde{E}}_{0x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \bar{\tilde{E}}_{0y}\vec{\boldsymbol{\jmath}}) = (\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2)\, e^{-i\alpha} \times (\boldsymbol{a}_1 - i\boldsymbol{a}_2)\ e^{i\alpha}, \tag{12.27}$$

здесь $\times$ знак векторного умножения. Далее, действуя согласно *свойствам* $\mathbf{2}^{\circ}$ и $\mathbf{3}^{\circ}$ векторного произведения (6.10), приведем это выражение к виду:

$$\left(\tilde{E}_{0x}\bar{\tilde{E}}_{0y} - \tilde{E}_{0y}\bar{\tilde{E}}_{0x}\right)\vec{\boldsymbol{k}} = -2i(\boldsymbol{a}_1 \times\ \boldsymbol{a}_2), \tag{12.28}$$

где $\vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{\imath}} \times \vec{\jmath}$.

Комплексные числа $\tilde{E}_{0x}$ и $\tilde{E}_{0y}$ запишем в показательной форме (7.5):

$$\tilde{E}_{0x} = |\tilde{E}_{0x}|e^{i\varphi_x}, \quad \tilde{E}_{0y} = |\tilde{E}_{0y}|e^{i\varphi_y}, \tag{12.29}$$

и подставим в (12.28). В результате получим, что:

$$|\tilde{E}_{0x}||\tilde{E}_{0y}|\left(e^{i(\varphi_x-\varphi_y)} - e^{-i(\varphi_x-\varphi_y)}\right) == -2i(\boldsymbol{a}_1 \times\ \boldsymbol{a}_2) \tag{12.30}$$

Воспользуемся нижней формулой (4.24) и. так векторы $\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2$ ортогональные, после

элементарных преобразований найдем второе уравнение:

$$a_1 a_2 = |\tilde{E}_{0x}||\tilde{E}_{0y}| \sin\varphi \tag{12.31}$$

где $\varphi = (\varphi_x - \varphi_y) -$ разность аргументов комплексных чисел $\tilde{E}_{0x}$ и $\tilde{E}_{0y}$.
Собирая вместе полученные уравнения (12.26) и (12.31) для неизвестных длин полуосей эллипса поляризации a_1, a_2, приходим к системе уравнений:

$$a_1^2 + a_2^2 = |\tilde{E}_{0x}|^2 + |\tilde{E}_{0y}|^2, \tag{12.32}$$

$$a_1 a_2 = |\tilde{E}_{0x}||\tilde{E}_{0y}| \sin\varphi, \tag{12.33}$$

решение которой определяется выражением:

$$a_1, a_2 = \sqrt{|\tilde{E}_{0x}|^2 + |\tilde{E}_{0y}|^2 + 2|\tilde{E}_{0x}||\tilde{E}_{0y}| \sin\varphi} \pm \sqrt{|\tilde{E}_{0x}|^2 + |\tilde{E}_{0y}|^2 - 2|\tilde{E}_{0x}||\tilde{E}_{0y}| \sin\varphi}$$

§13. Поверхностные токи Фуко и скин-эффект

Важный с теоретической и технической точек зрения класс задач составляют вопросы, связанные с поведением проводников, помещенных во внешнее переменное магнитное поле $\boldsymbol{H}$ с заданной частотой ω. Переменное магнитное поле, проникая внутрь проводника, индуцирует в нем, согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, переменное электрическое поле $\boldsymbol{E}$. Последнее, в силу дифференциального закона Ома:

$$\boldsymbol{j}_{\text{п}} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{13.1}$$

приводит к появлению плотности электрических токов проводимости $\boldsymbol{j}_{\text{п}}$ (так называемые токи Фуко). Как мы увидим, даже в однородном проводнике переменный ток в отличие от постоянного распределяется неравномерно по сечению проводника и, при определенных условиях, концентрируется в тонком слое вблизи поверхности проводника. Только что упомянутые условия мы сформулируем позже, используя естественным образом возникающий параметр $\delta -$ «глубина проникновения» поля внутрь проводника. Явление концентрации тока вблизи поверхности проводника получило название скин-эффекта и в свою очередь влияет на
величину эффективного сопротивления и самоиндукции проводника.

Мы ограничимся рассмотрением проводника, ограниченного плоской поверхностью x, y и расположенного в полупространстве $z > o$. Вне проводника, т.е. при $z < o$, будем считать периодическое магнитное поле заданным.

Для определения распределений магнитного и электрического полей, а также плотности электрического тока в объеме проводника, будем исходить из основных уравнений электромагнитных полей (уравнения Максвелла), записанных в гауссовой системе единиц измерения, как это принято в теоретической физике:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{13.2}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \qquad (13.3)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \qquad (13.4)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = o. \qquad (13.5)$$

(считаем, что сторонние силы, вызывающие электрический ток отсутствуют). Эти уравнения должны быть дополнены материальными уравнениями среды, в нашем случае это уравнения для изотропных проводников:

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{j}_{\text{п}} = \sigma\boldsymbol{E} \qquad , \qquad (13.6.)$$

которые мы к тому же будем считать однородными; иными словами μ и σ не зависят от координат.

Дополнительно заметим, что внутри проводников плотность токов смещения $\boldsymbol{j}_{\text{см}}$ (первое слагаемое в правой части уравнения (13.3)), на много порядков меньше плотности токов проводимости $\boldsymbol{j}_{\text{п}}$, так что ими можно вообще пренебречь. Наконец, будем считать, что объемные заряды в проводнике отсутствуют:

$$\rho = o, \qquad (13.7)$$

и

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\,\boldsymbol{E} \qquad (13.8)$$

Учитывая замечание относительно токов смещения и подставляя (13.6.) ÷ (13.8) в уравнения (13.2) ÷ (13.5), получим систему уравнений электромагнитного поля для проводников:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad (13.9)$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\,\boldsymbol{E}, \qquad (13.10)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = o, \qquad (13.11)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = o. \qquad (13.12)$$

Присутствующая в уравнениях напряженность индукционного электрического поля $\boldsymbol{E}$ возникает вследствие переменности магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Интересующее нас распределение плотности электрического тока $\boldsymbol{j}_{\text{п}}$ легко находится из соотношения (13.6.), если известна напряженность электрического поля. Поле $\boldsymbol{E}$ определяется прямым вычислением ротора (13.10) магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в проводнике, уравнение же для $\boldsymbol{H}$ получается путем исключения $\boldsymbol{E}$ из уравнений (13.9) и (13.10). Итак, применим операцию ротора к обеим частям (13.10):

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\boldsymbol{H}) = \frac{4\pi\sigma}{c}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E},$$

и, воспользовавшись (13.9), получим:

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}) = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad (13.13)$$

Применяя известную из векторного анализа формулу преобразования операций второго порядка, находим:

$$-\Delta\boldsymbol{H} + \text{grad div}\boldsymbol{H} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},$$

здесь Δ, как обычно, оператор Лапласа. Последнее уравнение в силу (13.12) приобретает теперь вид

$$\Delta\boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{13.14}$$

Это и есть уравнение в частных производных, которому должно удовлетворять магнитное поле внутри проводника. Граничные условия для магнитного поля на поверхности проводника, которые и обеспечивают единственность ограниченного периодического решения уравнения (13.14), как известно из электродинамики, гласят:

$$B_{n1} = B_{n2}, \qquad \boldsymbol{H}_{t1} = \boldsymbol{H}_{t2} \tag{13.15}$$

Индекс 1 относится к полупространству ($z< o$), индекс 2 соответственно к объему проводника, нормаль направлена из среды 1 по направлению к среде 2.
Ранее отмечалось, что магнитное поле вне проводника ($z< o$) полагается равным заданной периодической функции. Ее можно представить как действительную часть комплексного вектора $\widetilde{\boldsymbol{H}}_1$ магнитного поля, где

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_1 = \widetilde{\boldsymbol{H}}_o\, e^{-i\omega t} \tag{13.16}$$

Величина $\widetilde{\boldsymbol{H}}_o$ является, в нашем случае, постоянным комплексным вектором (см. (12.14)). Можно показать, что этот вектор параллелен поверхности проводника в том смысле, что действительные векторы, равные его действительной и мнимой частям, параллельны этой поверхности, или $\widetilde{H}_{oz} = o$.

Для обычных диа- и парамагнитных тел μ очень близко к единице и, следовательно, согласно первому из равенств (13.15) можно считать $H_{n1} = H_{n2}$. Отсюда и из второго равенства (13.15) можно сделать заключение о равенстве векторов магнитного поле вне и внутри проводника на поверхности раздела, также как и о равенстве соответствующих комплексных векторов:

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_1 = \widetilde{\boldsymbol{H}}_2 \tag{13.17}$$

В силу (13.16), (13.17) значение искомого комплексного вектора магнитного поля внутри проводника на границе раздела должно равняться

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_o\, e^{-i\omega t} \tag{13.18}$$

Обратимся теперь к уравнению (13.14), решение которого будем искать в форме комплексного вектора следующего вида

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \widetilde{\boldsymbol{h}}(x,y,z)\, e^{-i\omega t} \tag{13.19}$$

Неизвестный комплексный вектор $\widetilde{\boldsymbol{h}}(x,y,z)$, в силу однородности условий задачи по направлениям x и y, зависит только от координаты z. Поэтому его координатное представление (7.4) имеет вид:

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}(x,y,z) = \widetilde{\boldsymbol{h}}(z) = \tilde{h}_x(z)\boldsymbol{i} + \tilde{h}_y(z)\boldsymbol{j} + \tilde{h}_z(z)\boldsymbol{k} \tag{13.20}$$

Но вектор $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ и, следовательно $\widetilde{\boldsymbol{h}}(z)$, должен удовлетворять уравнению (13.12):

$$\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{h}}(z) = o,$$

из которого немедленно получаем, что

$$\frac{\partial \tilde{h}_z(z)}{\partial z} = o, \tag{13.21}$$

т.е. $\tilde{h}_z(z)$ равен некоторой постоянной. Так как комплексный вектор $\widetilde{\boldsymbol{h}}(z)$ в силу (13.18),(13.19) на границе равен $\widetilde{\boldsymbol{H}}_o$, составляющая $\widetilde{H}_{oz}$ которого равна нулю, то $\tilde{h}_z(z) \equiv o$. Соответственно, упрощается выражение (13.20):

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}(z) = \tilde{h}_x(z)\boldsymbol{i} + \tilde{h}_y(z)\boldsymbol{j} \tag{13.22}$$

Искомое решение (13.19), которое теперь запишем в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \widetilde{\boldsymbol{h}}(z)\, e^{-i\omega t}, \tag{13.23}$$

причем

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}(z = o) = \widetilde{\boldsymbol{H}}_o \tag{13.24}$$

подставим в уравнение (13.14). В результате, после сокращения на множитель $e^{-i\omega t}$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно векторной функции $\widetilde{\boldsymbol{h}}(z)$:

$$\frac{d^2\widetilde{\boldsymbol{h}}(z)}{dz^2} + k^2\widetilde{\boldsymbol{h}}(z) = o, \tag{13.25}$$

здесь

$$k = \sqrt{\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} i} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}(1 + i) \tag{13.26}$$

Действуя согласно алгоритму решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, находим общее решение, содержащее два произвольных постоянных комплексных вектора $\boldsymbol{C}_1$ и $\boldsymbol{C}_2$:

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}(z) = \boldsymbol{C}_1 e^{-\frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}(1-i)z} + \boldsymbol{C}_2 e^{\frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}(1-i)z}. \tag{13.27}$$

Из условия ограниченности решения при $z > o$, следует, что $\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{o}$, а из граничного условия (13.24) находим, что $\boldsymbol{C}_1 = \widetilde{\boldsymbol{H}}_o$. Определим параметр δ, называемый «глубиной проникновения», соотношением:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \qquad k = \frac{1+i}{\delta} \tag{13.28}$$

Подставим найденные значения $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$ в (13.27) и полученное выражение в (13.23). Тем самым найдем комплексный вектор магнитного поля

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \widetilde{\boldsymbol{H}}_o e^{-\frac{(1-i)z}{\delta} - i\omega t} = \widetilde{\boldsymbol{H}}_o e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}. \tag{13.29}$$

Комплексный вектор напряженности электрического поля $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ определяем теперь на основании уравнения (13.10), так что

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \frac{c}{4\pi\sigma} \mathrm{rot}\, \widetilde{\boldsymbol{H}} = \frac{c}{4\pi\sigma} \mathrm{rot} \left\{ \widetilde{\boldsymbol{H}}_o e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)} \right\} = \frac{c}{4\pi\sigma}\ e^{-i\omega t}\ \mathrm{rot} \left\{ \widetilde{\boldsymbol{H}}_o e^{-\frac{z}{\delta}(1-i)} \right\}. \tag{13.30}$$

Под знаком ротора в последнем выражении (13.30) стоит произведение вектора на скаляр. Ротор произведения скалярной функции f на векторную функцию $\boldsymbol{A}$ вычисляется по формуле векторного анализа

$$\mathrm{rot}\, (f\boldsymbol{A}) = f\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} + [\mathrm{grad} f, \boldsymbol{A}] = f\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} - [\boldsymbol{A}, \mathrm{grad} f] \tag{13.31}$$

Комплексный вектор $\widetilde{\boldsymbol{H}}_o$ не зависит от координат и следовательно rot $\widetilde{\boldsymbol{H}}_o = o.$ Что касается градиента, то он легко вычисляется по определению градиента:

$$\mathrm{grad}\, e^{-\frac{z}{\delta}(1-i)} = -\frac{1-i}{\delta} e^{-\frac{z}{\delta}(1-i)} \boldsymbol{k}, \tag{13.32}$$

где мы, как обычно, ввели единичный вектор $\boldsymbol{k}$ в направлении оси z. Следовательно, из (13.31) и (13.32) получаем, что

$$\mathrm{rot} \left\{ \widetilde{\boldsymbol{H}}_o e^{-\frac{z}{\delta}(1-i)} \right\} = \frac{1-i}{\delta} e^{-\frac{z}{\delta}(1-i)} \left[\widetilde{\boldsymbol{H}}_o, \boldsymbol{k} \right] \tag{13.33}$$

Подставляя (13.33) в (13.30), находим величину комплексной напряженности электрического поля:

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} (1-i) e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)} \left[\widetilde{\boldsymbol{H}}_o, \boldsymbol{k} \right]. \tag{13.34}$$

Согласно (12.14), комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля поляризованной волны имеет вид

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_0 = (\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2)\ e^{-i\alpha} \tag{13.35}$$

Рассмотрим вариант *линейно* поляризованной волны и, для конкретности, положим вектор $\boldsymbol{a}_1$ равным нулевому вектору (в пункте 3 было показано, что в случае линейно поляризованной волны один из векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ обращается в нуль). Вектор $\widetilde{\boldsymbol{H}}_0$ примет в этом случае вид

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_0 = i\, \boldsymbol{a}_2 e^{-i\alpha} = \boldsymbol{a}_2\, e^{-i(\alpha - \frac{\pi}{2})}. \tag{13.36}$$

Из выражения (12.2) очевидно, $|\boldsymbol{a}_2|$ есть амплитуда колебания, и потому естественно ввести обозначение

$$|\boldsymbol{a}_2| = H_o \tag{13.37}$$

Выберем направление вектора $\boldsymbol{a}_2$в качестве направления оси y, что даст возможность записать (13.36) как

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_0 = H_o\, e^{-i(\alpha - \frac{\pi}{2})} \boldsymbol{j} \tag{13.38}$$

После подстановки (13.38) в выражение (13.34) комплексный вектор напряженности электрического поля окажется равным

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = H_o\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}(1-i)e^{-\frac{z}{\delta}}\,e^{i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}[\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}] =$$

$$= H_o\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}(1+i)e^{-\frac{z}{\delta}}\,e^{i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t-\alpha\right)}\boldsymbol{i} =$$

$$= H_o\sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}}e^{-\frac{z}{\delta}}\,e^{i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\boldsymbol{i} \qquad (13.39)$$

Величину комплексного вектора напряженности магнитного поля найдем из (13.29) и (13.38):

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = H_o\,e^{-\frac{z}{\delta}}\,e^{i(\frac{z}{\delta}-\omega t+\frac{\pi}{2}-\alpha)}\boldsymbol{j} \qquad (13.40)$$

Выделяя вещественную часть в (13.39) и (13.40), найдем имеющие физический смысл векторы напряженностей магнитного и электрического полей:

$$\boldsymbol{H} = H_o\,e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\frac{z}{\delta}-\omega t+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\boldsymbol{j} =$$

$$= H_o\,e^{-\frac{z}{\delta}}\sin(\omega t-\frac{z}{\delta}+\alpha)\,\boldsymbol{j} \qquad (13.41)$$

$$\boldsymbol{E} = H_o\sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}}e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\frac{z}{\delta}-\omega t-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{i}=$$

$$= H_o\sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}}e^{-\frac{z}{\delta}}\sin(\omega t-\frac{z}{\delta}+\alpha-\frac{\pi}{4})\boldsymbol{i} \qquad (13.42)$$

Плотность электрического тока находится из (13.1), (13.42) и распределена по тому же закону, что и напряженность электрического поля

$$\boldsymbol{j}_{\text{п}} = \sigma\boldsymbol{E} = H_o\sqrt{\frac{\omega\sigma}{4\pi}}e^{-\frac{z}{\delta}}\sin(\omega t-\frac{z}{\delta}+\alpha-\frac{\pi}{4})\boldsymbol{i} \qquad (13.43)$$

Из за присутствия множителя $e^{-\frac{z}{\delta}}$ в выражениях (13.41)÷ (13.43), величины $\boldsymbol{H},\boldsymbol{E},\boldsymbol{j}_{\text{п}}$ экспоненциально убывают при возрастании z (вглубь проводника), и тем быстрее, чем меньше глубина проникновения δ. Как видно из (13.28), параметр глубины проникновения уменьшается с увеличением частоты поля. Поэтому можно утверждать, что с возрастанием частоты электромагнитное поле и токи концентрируются во все более тонком поверхностном слое.

§14. Нелинейные операции. Токи Фуко и выделение джоулева тепла. Поток электромагнитной энергии

Возбуждение токов Фуко в проводниках сопровождается поглощением энергии электромагнитного поля и увеличением внутренней энергии проводников за счет выделения джоулева тепла при протекании токов. Согласно первому началу термодинамики среднее по времени значение поглощенной энергии поля Q_eв единицу времени при постоянном объеме проводника и в отсутствие внешних источников тока должно равняться количеству тепла Q, выделяющемуся при прохождении электрического тока в проводнике, определяемому по закону Джоуля-Ленца выражением

$$Q = \int_v \overline{\boldsymbol{J}_{\text{п}}\boldsymbol{E}}\, dV \tag{14.1}$$

Черта над скалярным произведением $\boldsymbol{j}_{\text{п}}\boldsymbol{E}$ означает усреднение по периоду колебаний поля. Для вычисления интеграла (13.44) можно было бы воспользоваться выражениями (13.42) и (13.43). Мы поступим иначе и проведем вычисления, используя технику комплексных векторов. При этом нам понадобится вспомогательное равенство, вывод которого дан ниже.

Если какие-либо действительные векторные величины $\boldsymbol{a}(t)$ и $\boldsymbol{b}(t)$ записаны как комплексные векторы специального вида (для периодических процессов это так)

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{a}}_o\, e^{-i\omega t} \text{ и } \widetilde{\boldsymbol{b}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{b}}_o\, e^{-i\omega t}, \tag{14.2}$$

то для вычисления произведения $\boldsymbol{a}(t)\ \boldsymbol{b}(t)$ (понимаемого как скалярное здесь и дальше) конечно же следует сначала выделить вещественные части, так что

$$\boldsymbol{a}(t)\ \boldsymbol{b}(t) = \mathrm{Re}\,\widetilde{\boldsymbol{a}}(t)\ \mathrm{Re}\widetilde{\boldsymbol{b}}(t). \tag{14.3}$$

Однако существует широкий спектр задач, в которых нас интересует лишь *усредненное по времени* значение этого произведения:

$$\overline{\boldsymbol{a}(t)\ \boldsymbol{b}(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{a}(t)\ \boldsymbol{b}(t)\, dt.$$

Примером такой задачи как раз и является вычисление выражения $\overline{\boldsymbol{J}_{\text{п}}\boldsymbol{E}}$ в (14.1). Обращаем внимание на изменение обозначений в рамках этого параграфа: черта сверху означает усреднение по периоду колебания. а не комплексное сопряжение. Операцию комплексного сопряжения будем обозначать символом $*$.

Покажем, что интересующее нас *усредненное по времени* произведение можно вычислить по формуле

$$\overline{\boldsymbol{a}(t)\ \boldsymbol{b}(t)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\big\{\widetilde{\boldsymbol{a}}(t)\widetilde{\boldsymbol{b}}^*(t)\big\}, \tag{14.4}$$

которая оказывается более удобной для вычислений в сравнении с формулой (14.3) и последующего интегрирования. Во первых, при использовании (14.4) не приходится вычислять интеграл по переменной времени; во-вторых, выделять действительные части каждого из комплексных векторов; наконец, исчезают множители $e^{\pm i\omega t}$.

Из (14.3) и (14.2) очевидно следует цепочка равенств

$$\boldsymbol{a}(t)\ \boldsymbol{b}(t) = \mathrm{Re}\,\widetilde{\boldsymbol{a}}(t)\ \mathrm{Re}\widetilde{\boldsymbol{b}}(t) =$$

$$= \frac{\left(\widetilde{\boldsymbol{a}}_o\, e^{-i\omega t} + \widetilde{\boldsymbol{a}}_o^*\, e^{i\omega t}\right)}{2}\frac{\left(\widetilde{\boldsymbol{b}}_o\, e^{-i\omega t} + \widetilde{\boldsymbol{b}}_o^*\, e^{i\omega t}\right)}{2},$$

т.е. произведение

$$\boldsymbol{a}(t)\ \boldsymbol{b}(t) = \frac{1}{4}\left(\widetilde{\boldsymbol{a}}_o\, \widetilde{\boldsymbol{b}}_o e^{-2i\omega t} + \widetilde{\boldsymbol{a}}_o \widetilde{\boldsymbol{b}}_o^* + \widetilde{\boldsymbol{a}}_o^* \widetilde{\boldsymbol{b}}_o + \widetilde{\boldsymbol{a}}_o^* \widetilde{\boldsymbol{b}}_o^*\, e^{2i\omega t}\right).$$

При усреднении по времени члены, содержащие множители $e^{\pm 2i\omega t}$, исчезают. Так что окончательно получаем

$$\overline{\boldsymbol{a}(t)\,\boldsymbol{b}(t)} = \frac{1}{4}\left(\widetilde{\boldsymbol{a}}_o\widetilde{\boldsymbol{b}}_o^* + \widetilde{\boldsymbol{a}}_o^*\widetilde{\boldsymbol{b}}_o\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\widetilde{\boldsymbol{a}}_o\widetilde{\boldsymbol{b}}_o^*\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\widetilde{\boldsymbol{a}}(t)\widetilde{\boldsymbol{b}}^*(t)\right\}$$

что и доказывает утверждение (14.4). При переходе от второго выражения в этой последовательности равенств к третьему, использовалось доказанное ранее свойство скалярного произведения комплексных векторов (6.12)

Перейдем к вычислению подынтегрального выражения $\overline{\boldsymbol{j}_\text{п}\boldsymbol{E}}$ в (14.1). Для удобства приведем здесь значения комплексного вектора напряженности электрического поля (13.39)

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = H_o\sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}}\,e^{-\frac{z}{\delta}}\,e^{i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\boldsymbol{i} \qquad (14.5)$$

и комплексного вектора плотности электрического тока $\tilde{\boldsymbol{j}}_\text{п} = \sigma\widetilde{\boldsymbol{E}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{j}}_\text{п} = H_o\sqrt{\frac{\omega\sigma}{4\pi}}\,e^{-\frac{z}{\delta}}\,e^{i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\boldsymbol{i}. \qquad (14.6)$$

Воспользовавшись правилом (14.4) вычисления усредненных по времени произведений, получаем

$$\overline{\boldsymbol{j}_\text{п}\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{\boldsymbol{j}}_\text{п}\widetilde{\boldsymbol{E}}^*\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{H_o\sqrt{\frac{\omega\sigma}{4\pi}}\,e^{-\frac{z}{\delta}}\,e^{i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}H_o\sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}}\,e^{-\frac{z}{\delta}}\,e^{-i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i})\right\} =$$

$$= \frac{\omega H_o^2}{8\pi}e^{-\frac{2z}{\delta}} \qquad (14.7)$$

Количество средней энергии Q_e, поглощаемой в единицу времени в объеме прямоугольного параллелепипеда, опирающегося на единицу площади поверхности проводника, как видно из (14.1) и (14.7) равно

$$Q_e = \int_0^\infty \frac{\omega H_o^2}{8\pi}e^{-\frac{2z}{\delta}}\,dz = \frac{\omega H_o^2}{16\pi}\delta. \qquad (14.8)$$

Зависимость Q_e от частоты поля найдем, подставив выражение (13.28) для глубины проникновения в (14.8). В результате получим

$$Q_e = \frac{cH_o^2}{16\pi}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \qquad (14.9)$$

Следовательно, поглощение (диссипация) энергии при больших частотах оказывается пропорциональной $\sqrt{\omega}$.

Рассмотрим вопрос о диссипации энергии поля в единицу времени с иной позиции, а именно с точки зрения среднего количества энергии поля, втекающей в единицу времени извне внутрь проводника. Запишем уравнения (13.9) и (13.10) в виде

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad (14.10)$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j}_\text{п}, \qquad (14.11)$$

при этом мы подставили в уравнении (13.10) $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}_\text{п}}{\boldsymbol{\sigma}}$. Умножим уравнения (14.10) и (14.11) скалярно на $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$ и составим разность полученных произведений

$$\boldsymbol{H}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} == -\frac{\mu}{c}\,\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j}_\text{п}\,\boldsymbol{E} \qquad (14.12)$$

Для преобразования левой части этого уравнения воспользуемся равенством

$$\mathrm{div}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{b}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}.$$

Теперь (14.11) приводится к виду

$$\mathrm{div}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] = -\frac{\mu}{c}\,\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j}_\text{п}\,\boldsymbol{E}. \qquad (14.13)$$

Разрешим это уравнение относительно $\boldsymbol{j}_\text{п}\,\boldsymbol{E}$. Результат запишем в форме

$$\boldsymbol{j}_\text{п}\,\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{div}\frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] + \frac{\mu}{4\pi}\,\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad (14.14)$$

Вектор, стоящий под знаком дивергенции в (14.14), называется вектором Пойнтинга $\boldsymbol{S}$**.** Таким образом

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] \qquad (14.15)$$

и интерпретируется в физике как плотность потока энергии электромагнитного поля.

Усредним обе части (14.14) по времени:

$$\overline{\boldsymbol{j}_\text{п}\,\boldsymbol{E}} = -\mathrm{div}\frac{c}{4\pi}\overline{[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]} + \frac{\mu}{4\pi}\overline{\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}} \qquad (14.16)$$

В последнем выражении под знак дивергенции входит среднее по времени значение вектора Пойнтинга

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{c}{4\pi}\overline{[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]} \qquad (14.17)$$

Мы уже убедились при получении результата (14.6) в полезности перехода от действительных векторов $\boldsymbol{j}_\text{п}, \boldsymbol{E}$ к комплексным $\tilde{\boldsymbol{j}}_\text{п}, \widetilde{\boldsymbol{E}}$. Поэтому запишем вещественные векторы $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ в правой части (14.14) через соответствующие им комплексные векторы $\widetilde{\boldsymbol{E}}, \widetilde{\boldsymbol{H}}$:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{E}} + \widetilde{\boldsymbol{E}}^*\right) \text{ и } \boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{H}} + \widetilde{\boldsymbol{H}}^*\right). \qquad (14.18)$$

Выразим вначале векторное произведение $[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]$ через векторные произведения комплексных векторов, опираясь на их свойство $\mathbf{3}^\circ$:

$$[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] = \frac{1}{4}\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{E}} + \widetilde{\boldsymbol{E}}^*\right),\left(\widetilde{\boldsymbol{H}} + \widetilde{\boldsymbol{H}}^*\right)\right] = \frac{1}{4}\left\{\left[\widetilde{\boldsymbol{E}},\widetilde{\boldsymbol{H}}\right] + \left[\widetilde{\boldsymbol{E}},\widetilde{\boldsymbol{H}}^*\right] + \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}^*,\widetilde{\boldsymbol{H}}\right] + \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}^*,\widetilde{\boldsymbol{H}}^*\right]\right\} \qquad (14.19)$$

Временная зависимость комплексных векторов задается множителем $e^{-i\omega t}$, а комплексно сопряженных векторов множителем $e^{i\omega t}$. (Напоминаем, что $\widetilde{\boldsymbol{E}} = \widetilde{\boldsymbol{E}}_o\,e^{-i\omega t}, \widetilde{\boldsymbol{H}} =$

$\widetilde{\boldsymbol{H}}_o\, e^{-i\omega t}$; $\widetilde{\boldsymbol{E}}_o$ и $\widetilde{\boldsymbol{H}}_o$ комплексные векторы, не зависящие от времени). Используя это обстоятельство, запишем (14.19) в виде

$$[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] = \frac{1}{4}\left\{\left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_o,\widetilde{\boldsymbol{H}}_o\right] e^{-2i\omega t} + \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_o,\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{o}}^*\right] + \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{o}}^*,\widetilde{\boldsymbol{H}}_o\right] + \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{o}}^*,\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{o}}^*\right] e^{2i\omega t}\right\}$$

на основании свойства $\mathbf{2}^{\circ}$ комплексных векторов. При усреднении по времени первое и четвертое слагаемые в правой части выражения исчезают, так что

$$\overline{[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]} = \frac{1}{4}\left\{\left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_o,\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{o}}^*\right] + \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{o}}^*,\widetilde{\boldsymbol{H}}_o\right]\right\} = \frac{1}{4}\left\{\left[\widetilde{\boldsymbol{E}},\widetilde{\boldsymbol{H}}^*\right] + \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}^*,\widetilde{\boldsymbol{H}}\right]\right\} =$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\widetilde{\boldsymbol{E}},\widetilde{\boldsymbol{H}}^*\right] \tag{14.20}$$

Второе слагаемое в (14.14) вычисляется по аналогичной схеме. Для начала, используя второе выражение (14.18), имеем

$$\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{1}{4}\left(\widetilde{\boldsymbol{H}} + \widetilde{\boldsymbol{H}}^*\right)\frac{d}{dt}\left(\widetilde{\boldsymbol{H}} + \widetilde{\boldsymbol{H}}^*\right) \tag{14.21}$$

Далее, так как

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \widetilde{\boldsymbol{H}}_o\, e^{-i\omega t} \text{ и } \widetilde{\boldsymbol{H}}^* = \widetilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{o}}^*\, e^{i\omega t}$$

(14.21) принимает вид

$$\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{1}{4}\left(\widetilde{\boldsymbol{H}}_o\, e^{-i\omega t} + \widetilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{o}}^*\, e^{i\omega t}\right)\frac{d}{dt}\left(\widetilde{\boldsymbol{H}}_o\, e^{-i\omega t} + \widetilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{o}}^*\, e^{i\omega t}\right) =$$

$$= i\omega\frac{1}{4}\left(-\widetilde{\boldsymbol{H}}_o^2\, e^{-2i\omega t} + \left|\widetilde{\boldsymbol{H}}_o\right|^2 - \left|\widetilde{\boldsymbol{H}}_o\right|^2 + \widetilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{o}}^{*\,2}\, e^{2i\omega t}\right). \tag{14.22}$$

Усреднив это выражение по времени, легко прийти выводу, что

$$\overline{\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}} = o. \tag{14.23}$$

и, как следствие, вместо (14.16) получим уравнение

$$\overline{\boldsymbol{J}_{\text{п}}\,\boldsymbol{E}} = -\mathrm{div}\frac{c}{4\pi}\overline{[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]} \tag{14.24}$$

Количество выделяемого в единицу времени тепла, согласно (14.1), есть интеграл по объему проводника от $\overline{\boldsymbol{J}_{\text{п}}\boldsymbol{E}}$. Поэтому на основании (14.24) будем иметь

$$Q = \int_v \overline{\boldsymbol{J}_{\text{п}}\boldsymbol{E}}\, dV = -\int_v \mathrm{div}\frac{c}{4\pi}\overline{[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]}\, dV \tag{14.25}$$

Дальнейшее преобразование осуществим, применяя теорему Гаусса-Остроградского. Получим, что Q вычисляется как интеграл

$$Q = -\oint_{\Sigma} \frac{c}{4\pi}\left(\overline{[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]},\boldsymbol{n}\right) ds, \tag{14.26}$$

по поверхности Σ всего проводника, причем $\boldsymbol{n}-$ внешняя к поверхности нормаль. Выберем направление нормали $\boldsymbol{N}$ внутрь проводника. Это приведет к смене знака в (14.26) и следовательно

$$Q = \oint_{\Sigma} \frac{c}{4\pi}(\overline{[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]},\boldsymbol{N})\,ds \tag{14.27}$$

а интеграл будет теперь означать количество средней энергии поля, втекающей в единицу времени через поверхность проводника.
Далее, с помощью равенств (14.20) и (14.27), приходим к искомому результату, а именно, к формуле для Q, записанной через комплексные векторы электрического и магнитного полей:

$$Q = \frac{c}{4\pi}\oint_{\Sigma} \frac{1}{2}(\mathrm{Re}[\widetilde{\boldsymbol{E}},\widetilde{\boldsymbol{H}}^{*}],\boldsymbol{N})\,ds \tag{14.28}$$

Для количества энергии Q_e, поступающей в проводник в единицу времени через единицу площади, как это следует из (7,28),имеем

$$Q_e = \frac{c}{8\pi}(\mathrm{Re}[\widetilde{\boldsymbol{E}},\widetilde{\boldsymbol{H}}^{*}],\boldsymbol{N})_{\Sigma}, \tag{14.29}$$

где Σ обозначает значение выражения на поверхности. Воспользуемся полученным соотношением (14.29) применительно к нашей задаче. Для этого обратимся к ранее полученным значениям (13.39), (13.40) для $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ и вычислим их значения на поверхности плоского проводника, положив $z = o$. В результате получим

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = H_o\sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}}\; e^{-i\left(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}\boldsymbol{i},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = H_o\; e^{-i(\omega t-\frac{\pi}{2}+\alpha)}\boldsymbol{j}$$

Векторное произведение легко вычисляется на основании свойств векторного произведения комплексных векторов, а именно

$$[\widetilde{\boldsymbol{E}},\widetilde{\boldsymbol{H}}^{*}] = H_o^2\sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}}\; e^{-i\frac{\pi}{4}}[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}] = H_o^2\sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}}\; e^{-i\frac{\pi}{4}}\boldsymbol{N}, \tag{14.30}$$

так как $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{N}.$
Для действительной части $[\widetilde{\boldsymbol{E}},\widetilde{\boldsymbol{H}}^{*}]$ получим

$$\mathrm{Re}[\widetilde{\boldsymbol{E}},\widetilde{\boldsymbol{H}}^{*}] = \frac{H_o^2}{2}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}\boldsymbol{N}\,.$$

Подставив это выражение в (14.29), придем к конечному результату

$$Q_e = \frac{cH_o^2}{16\pi}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}\,,$$

который, как и должно быть, в точности совпадает с (14.9).

……………………………………………………………..

Список литературы

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 13 изд., М., 2004 г.

2. Маркушевич А.И. Комплексные числа и конформные отображения. 3 изд., М., 1979 г.

3. Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М., 2004г.

4. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. 2 изд., М., 2003 г.

5. Привалов И.И. Введение в теорию функции комплексного переменного. 13 изд., М., 1988 г.

6. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. 2 изд., М., 2004г.

7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. 7 изд. М., 2009 г.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. 8 изд. М., 2003 г.