Федеральное Государственное Автономное образовательное учреждение

высшего образования

Российский научно исследовательский медицинский университет

им. Н.И. Пирогова

Медико–биологический факультет

Кафедра высшей математики

Теория скалярного и векторного полей.

Методическое пособие

Автор:
доктор физ.-мат. наук, профессор В.Н.Акимов.

Москва 2019

Оглавление.

Глава I:криволинейные системы координат и прикладные задачи.

§1. Элементы теории криволинейных координат.

1.1.Криволинейные координаты.

1.2.Координатные линии и единичные базисные векторы (1-й способ построения).

1.3.Координатные поверхности и единичные базисные векторы (2-й способ построения).

1.4.Криволинейные ортогональные координаты. Физические, контравариантные и ковариантные составляющие вектора.

1.5. Законы преобразований контравариантных и ковариантных составляющих вектора. Взаимосвязь контравариантных и ковариантных компонент вектора.

1.6. Общее определение вектора и тензора.

§2. Примеры криволинейных ортогональных координат.

2.1.Цилиндрические координаты.

2.2.Сферические координаты.

§3.Приложения ортогональных криволинейных координат к механике частиц.

3.1. Кинематика: вектор скорости и его составляющие в ортогональной криволинейной системе координат.

3.2.Динамика:уравнения движения частицы в ортогональной криволинейной системе координат (второй закон Ньютона).

3.3 Уравнения движения в цилиндрической системе координат.

3.4 Примеры задач в цилиндрической системе координат.

3.5 Уравнения движения частицы в сферической системе координат.

3.6.Динамика: уравнения Лагранжа в обобщенных координатах.

Глава II. Векторный анализ: интегральное исчисление векторных полей.

§1. Криволинейный интеграл второго рода (поток векторного поля через поверхность)

Глава III. Векторный анализ: дифференциальные операции над полями и прикладные задачи.

Глава IV. Векторный анализ: дифференциальные операции над полями и прикладные задачи

Глава V. Векторный анализ: интегральные теоремы и прикладные задачи

§1. Элементы теории криволинейных координат.

1.1.Криволинейные координаты.

В прямоугольных декартовых координатах $\{x, y, z\}$ положение точки P в пространстве определяется радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала координат в эту точку:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad 1.1$$

Однако положение точки в пространстве, а следовательно, и радиус-вектор $\vec{r}$ можно определить тремя другими числами (координатами) $\{q^1, q^2, q^3\}$, более соответствующими частной задаче и имеющими, в некоторых случаях, определенный геометрический смысл. Сочетание – более соответствующими – мы употребили в том смысле, что как математические выражения, так и техника решения задачи при удачном выборе тройки чисел $\{q^1, q^2, q^3\}$ в ряде случаев значительно упрощаются. При выборе более удобных координат руководствуются наличием симметрии и особенностями в постановке рассматриваемой частной задачи. Набор величин $\{q^1, q^2, q^3\}$, определяющих положение точки P в пространстве, называют **криволинейными координатами**. Примеры криволинейных координат рассматриваются в параграфе **§2** и мы рекомендуем обратится к нему после знакомства с содержанием настоящего 1.1 и следующего пунктов 1.2.
Так как любой точке P, с одной стороны, ставится в соответствие три координаты $\{q^1, q^2, q^3\}$, а с другой, эта же точка определяется заданием прямоугольных декартовых координат $\{x, y, z\}$, то между ними можно установить функциональные связи. Рассматривая каждую из координат q^i $(i = 1,2,3)$ как функцию $\{x, y, z\}$, запишем:

$$q^1 = q^1(x, y, z), \;\; q^2 = q^2(x, y, z), \;\; q^3 = q^3(x, y, z) \qquad 1.2$$

и, обратно, полагая $\{x, y, z\}$ функциями криволинейных координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, получим

$$x = x(q^1, q^2, q^3), \quad y = y(q^1, q^2, q^3), \quad z = z(q^1, q^2, q^3). \qquad 1.3$$

Подставим соотношения (1.3) для $\{x, y, z\}$ в (1.1). Тем самым установим зависимость радиус-вектора $\vec{r}$ от координат $\{q^1, q^2, q^3\}$:

$$\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3) = x(q^1, q^2, q^3)\vec{i} + y(q^1, q^2, q^3)\vec{j} + z(q^1, q^2, q^3)\vec{k}. \qquad 1.4$$

Это представление для радиус-вектора $\vec{r}$ будет ниже неоднократно использоваться.

1.2.Координатные линии и единичные базисные векторы (1-й способ построения).

Пусть заданы три функции:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad 1.5$$

одного параметра t на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$.Полагая, что $\{x, y, z\}$ рассматриваются как координаты точки в декартовом пространстве, будем говорить, что выражения (1.5) являются уравнениями кривой линии в параметрическом виде.
Подставим значения координат точки из (1.5) в выражение для радиус-вектора (1.1). В таком случае получим еще одну форму задания кривой

$$\vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} \qquad 1.6$$

называемую векторной формой записи кривой линии в параметрическом виде.

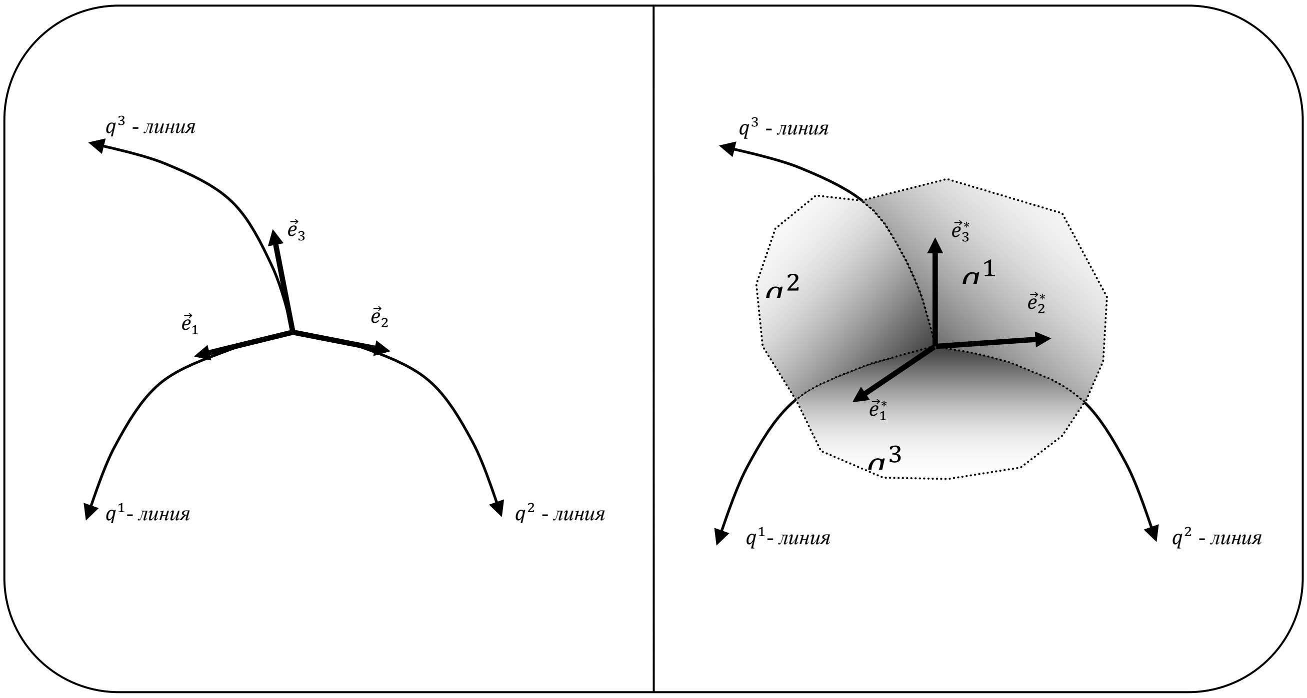


Рис. 1 **Рис. 2**

Перейдем теперь к построению координатных линий, проходящих через произвольную точку $\bar{P}$ с координатами $\{\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\}$. Если в соотношениях (1.3) зафиксировать любую пару аргументов, а оставшийся считать переменным параметром, играющем туже роль, что и параметр t в уравнениях (1.5), то получим однопараметрическое задание кривой. Проделав эту процедуру с выражением (1.4), приходим к выводу, что конец радиус-вектора $\vec{r}$ опишет именно эту кривую.

Для начала будем считать переменным параметром криволинейную координату q^1, а координаты q^2, q^3 зафиксируем равным $\bar{q}^2, \bar{q}^3$ соответственно. Кривую, получающуюся при изменении координаты q^1, будем называть q^1- **координатной линией**, проходящей через точку $\bar{P}$ с координатами $\{\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\}$, То, что координатная линия q^1 проходит через точку $\bar{P}$, следует из самого построения рассматриваемой кривой. Что касается векторной формы записи q^1 координатной линии, то она получается из выражения (1.4), в котором следует положить $q^2 = \bar{q}^2$ и $q^3 = \bar{q}^3$:

$$\vec{r} = \vec{r}(q^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3) = x(q^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3)\vec{\imath} + y(q^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3)\vec{\jmath} + z(q^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3)\vec{k}. \qquad 1.7$$

Далее, выберем поочередно в качестве переменных параметров криволинейные координаты q^2 и q^3. В результате аналогичных рассуждений получим две дополнительные координатные линии q^2и q^3, которые также проходят через точку $\bar{P}$. Тем самым приходим к выводу, что через любую точку можно провести три координатных линии (рис.1), вдоль каждой из которых изменяется лишь одна криволинейная координата, чем, собственно, эти линии и интересны в сравнении с любой другой тройкой линий, проходящей через ту же точку.

Понятие координатных линий является важным еще в одном отношении. Решение задач, связанных с такими объектами исследования как векторы и векторные поля, требует введения единичных базисных векторов в криволинейных координатах, имеющих такое же значение, как и базисные векторы в декартовой системе координат. При этом хотелось бы построить базисные векторы наиболее естественным способом, а потому идея выбрать в качестве базисных векторов в любой точке P векторы, касательные к координатным линиям, проходящих через указанную точку, вполне оправдана (такой метод введения базиса назовем **первым способом** построения базисных векторов). Именно так и поступают в теории криволинейных координат, тем более что математическое выражение для вектора, касательного к кривой в данной точке, имеет простой вид. Напомним известное из математического анализа утверждение: если кривая задана в виде векторной функции $\vec{r}(t)$ параметра t, то вектор

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad 1.8$$

касателен к кривой в соответствующей точке.

Обратимся к векторному уравнению (1.7) координатной линии q^1. Переменная q^1 имеет в нем тот же смысл, что и параметр t в выражении (1.6). Согласно (1.8), для построения касательной мы должны продифференцировать выражение (1.7) по q^1, а поскольку значения q^2, q^3 фиксированы, то касательным вектором следует считать частную производную

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1} \qquad 1.9$$

Этот вектор, вообще говоря, не единичный. Введем единичный вектор $\vec{e}_1$, определив его равенством:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1} \qquad 1.10$$

где H_1 длина вектора $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1}$:

$$H_1 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1}\right| \qquad 1.11$$

Повторяя эти рассуждения по отношению к переменным q^2и q^3 и выше полученные выражения для $\vec{e}_1$, придем к трем формулам:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\, q^1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\, q^2}, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\, q^3} \qquad 1.12$$

или:

$$\vec{e}_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\, q^i} \quad (i = 1,2,3), \qquad 1.13$$

на основе которых вычисляются единичные базисные векторы в конкретных криволинейных координатах. Присутствующие в (1.10) величины H_i, имеющие смысл длин базисных векторов $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$:

$$H_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\right| \quad (i = 1,2,3) \qquad 1.14$$

называются коэффициентами Ламэ. Из представления (1.4) для $\vec{r}$ следует, что:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial x}{\partial q^i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q^i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q^i}\vec{k}, \quad (i = 1,2,3) \qquad 1.15$$

и, в соответствии с определением (1.14), учитывая (1.15),для коэффициентов Ламэ имеем:

$$H_i{}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^i}\right)^2, \quad (i = 1,2,3) \qquad 1.16$$

Ниже, на примерах конкретных криволинейных координат, мы проиллюстрируем применение формул (1.15,1.16) для вычисления коэффициентов Ламэ и нахождения единичных базисных векторов. Значение коэффициентов Ламэ не исчерпывается тем, что они входят в выражения (1.13). Оказывается, что они присутствуют во многих формулах векторного анализа, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

1.3.Координатные поверхности и единичные базисные векторы (2-й способ построения).

До сих пор мы проводили рассуждения с использованием выражений (1.3,1.4), оставляя в стороне соотношения связей (1.2).
Обратимся теперь к ним и рассмотрим **поверхность уровня функции** $q^1(x, y, z)$, т.е. геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$q^1(x, y, z) = C_1, \qquad 1.17$$

где C_1 произвольная постоянная. Каждому значению C_1 соответствует своя поверхность. В совокупности указанные поверхности образуют семейство поверхностей. В нашем распоряжении имеется еще два семейства поверхностей:

$$q^2(x, y, z) = C_2, \quad q^3(x, y, z) = C_3, \qquad 1.18$$

здесь C_2 и C_3 произвольные постоянные.
Через каждую точку пространства проходит по одной поверхности каждого семейства (рис.2). Назовем эти поверхности координатными поверхностями $q^i = const. (i = 1,2,3)$. В своем пересечении каждая пара координатных поверхностей даст по одной линии пересечения. Вдоль линии пересечения координатных поверхностей $q^2 = const.$ и $q^3 = const.$ изменяется только координата q^1, т.е. эта линия пересечения является ранее рассмотренной координатной линией q^1. По аналогии, кривая пересечения пар координатных поверхностей $q^1 = const.$ и $q^3 = const.$ есть координатная линия q^2, а

кривая пересечения координатных поверхностей $q^1 = const.$ и $q^2 = const.$является координатной линией q^1, что отражено на рис.2.
Введение в рассмотрение координатных поверхностей предоставляет еще один естественный с геометрической точки зрения метод построения базисных векторов в любой точке P пространства. Действительно, имея в распоряжении три координатных поверхности, проходящих через точку P, можно, как **2-й способ построения** базисных векторов, выбрать нормали к этим поверхностям в указанной точке. Построение нормали к поверхности, определяемой уравнением

$$u(x, y, z) = C = Const \qquad 1.19$$

осуществим, воспользовавшись понятием вектора градиента скалярного поля $u(x, y, z)$, определяемого в прямоугольных декартовых координатах равенством:

$$\text{grad u}= \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad 1.20$$

Напомним, что этот вектор обладает двумя важными свойствами: во-первых, градиент вычисленный в точке P направлен по нормали к поверхности уровня $u(x, y, z) = C$, проходящей через эту точку, а во-вторых, указывает направление наибольшего возрастания скалярного поля. Чтобы найти математическую форму записи базисных векторов, рассмотрим три вектора

$$\text{grad}\, q^i\ (x, y, z), \quad (i = 1,2,3,), \qquad 1.21$$

где $q^i(x, y, z)$ определены соотношениями (1.2). Согласно свойству градиента, каждый из векторов (1.21) направлен по нормали к соответствующей поверхности уровня $q^i(x, y, z) = const$ и, следовательно, grad q^i задают направления интересующих нас базисных векторов второго способа построения. Эти векторы в общем случае оказываются не единичными. Для построения единичных базисных векторов $\vec{e_i}^*$ $(i = 1,2,3,)$ введем обозначения h_i для длин векторов grad q^i :

$$h_i = |\text{grad}\ \ q^i|, \qquad 1.22$$

которые называются дифференциальными параметрами первого порядка.
Итак, в принятых обозначениях, тройка единичных базисных векторов, определенных вторым способом, задается выражениями:

$$\vec{e_i}^* = \frac{1}{h_i}\ \text{grad}\ \ q^i. \qquad 1.23$$

и направлены они в сторону возрастающих значений q^i (градиент указывает направление наибольшего возрастания функции).
Параметры h_i, как это следует из (1.22) и определения градиента (1.20) в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\text{grad}\ \ q^i = \frac{\partial\, q^i}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\, q^i}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\, q^i}{\partial z}\vec{k} \qquad 1.24$$

вычисляются по формулам:

$$h_i^{\ 2} = \left(\frac{\partial\, q^i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\, q^i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\, q^i}{\partial z}\right)^2 \qquad 1.25$$

Считаем полезным обратить внимание на следующие моменты, касающиеся свойств криволинейных координат:

А) Существенное отличие криволинейных координат от прямоугольных декартовых проявляется в том, что в криволинейных координатах направления единичных базисных векторов, выбранных как первым, так и вторым способами, изменяются при переходе от одной точки к другой, т.е. векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (равно как и $\vec{e}_1^{\ *}, \vec{e}_2^{\ *}, \vec{e}_3^{\ *}$) являются функциями координат точки в которой они построены.

В) Пусть в некоторой точке P задан вектор $\vec{\mathrm{a}}$ (например ускорение). При решении задач может возникнуть необходимость разложения вектора по трем некомпланарным векторам. Такое разложение можно осуществить как по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{\mathrm{a}} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \qquad 1.26$$

так и по базису $\vec{e}_1^{\ *}, \vec{e}_2^{\ *}, \vec{e}_3^{\ *}$:

$$\vec{\mathrm{a}} = a_1^{\ *}\vec{e}_1^{\ *} + a_2^{\ *}\vec{e}_2^{\ *} + a_3^{\ *}\vec{e}_3^{\ *} \qquad 1.27$$

Так как базисные векторы первого и второго способов построения в общем случае не совпадают, то и коэффициенты разложений вектора $\vec{\mathrm{a}}$ в выражениях (18) и(19) различаются.

С) Имеют место полезные соотношения, связывающие векторы $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\, q^i}$ и grad q^i.Для их вывода рассмотрим выражение для дифференциала $d\vec{r}$ векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3)$:

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1}dq^1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2}dq^2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3}dq^3 \qquad 1.28$$

и умножим обе его части скалярно на gradq^i. В результате получим:

$$(\mathrm{grad}q^i d\vec{r}) = \left(\mathrm{grad}q^i\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1}\right)dq^1 + \left(\mathrm{grad}q^i\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2}\right)dq^2 + \left(\mathrm{grad}q^i\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3}\right)dq^3 \qquad 1.29$$

Распишем подробно скалярное произведение в левой части этого равенства, используя определение (1.24) для градиента и выражение (1.28) для $d\vec{r}$:

$$(\mathrm{grad}q^i d\vec{r}) = \frac{\partial q^i}{\partial x}dx + \frac{\partial q^i}{\partial y}dy + \frac{\partial q^i}{\partial z}dz = dq^i \qquad 1.30$$

Подставляя (1.30) в левую часть равенства (1.29), приходим к равенству:

$$dq^i = \left(\mathrm{grad}q^i\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1}\right)dq^1 + \left(\mathrm{grad}q^i\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2}\right)dq^2 + \left(\mathrm{grad}q^i\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3}\right)dq^3 \qquad 1.31$$

Полагая i в этой формуле последовательно равным 1,2,3, в силу произвольности dq^1, dq^2, dq^3, получим искомые соотношения:

$$\left(\operatorname{grad} q^i \frac{\partial \vec r}{\partial q^i}\right) = 1 \qquad (i = 1,2,3), \qquad 1.32$$

$$\left(\operatorname{grad} q^i \frac{\partial \vec r}{\partial q^j}\right) = 0 \qquad (i \neq j) \qquad 1.33$$

Векторы, обладающие свойствами (1.32) и (1.33) называются **взаимными**. Ниже мы воспользуемся свойством (1.32) для установления связей между коэффициентами Ламэ H_i и дифференциальными параметрами первого порядка h_i.

1.4.Криволинейные ортогональные координаты. Физические, контравариантные и ковариантные составляющие вектора.

Начнем с введения понятия криволинейных ортогональных координат. Криволинейные координаты называются **ортогональными**, если координатные линии в каждой точке взаимно перпендикулярны, что одновременно означает ортогональность базисных векторов $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$.

В приложениях наиболее часто применяют именно **криволинейные ортогональные координаты.** Это обусловлено тем, что для них

1) единичные базисные векторы, построенные по первому и второму способам, совпадают, т.е.

$$\vec e_i = \vec e_i^{\,*}; \qquad 1.34$$

(докажите самостоятельно);

2) единичные базисные векторы взаимно ортогональны, и потому для скалярных произведений этих векторов справедливы равенства:

$$(\vec e_i \vec e_k) = 0, \quad (i \neq k), \qquad 1.35$$

что весьма удобно при проведении вычислений;

3) для криволинейных ортогональных координат разложения (1.26) и (1.27) совпадают в силу равенства (1.34):

$$\vec a = a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2 + a_3 \vec e_3 \,. \qquad 1.36$$

Коэффициенты разложения a_i $(i = 1,2,3)$ в этом выражении называются **физическими составляющими.** либо **криволинейными составляющими вектора** $\vec a$ или же **проекциями вектора** $\vec a$ на оси криволинейных координат. Представление вектора в виде (1.36) далеко не единственное, используемое в приложениях. Ниже, в рамках этого параграфа, мы остановимся на сделанном утверждении подробнее. Однако в курсах общей физики, как правило, применяется разложение (1.36) и определенное здесь понятие проекций вектора $\vec a$ на оси криволинейных координат.

4) между коэффициентами H_i и параметрами h_i существует простая связь:

$$h_i = \frac{1}{H_i} \qquad 1.37$$

Для доказательства этого равенства обратимся к определению (1.23) базисных векторов $\vec e_i^{\,*}$. Так как криволинейные координаты ортогональные, то $\vec e_i = \vec e_i^{\,*}$и выражению (1.23) можно придать вид:

$$\mathrm{grad}q^i = h_i\vec{e}_i. \qquad 1.38$$

С другой стороны, как следует из (1.10), для вектора $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}$ имеем:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i} = H_i\vec{e}_i. \qquad 1.39$$

Воспользуемся теперь свойством взаимных векторов, записанном в форме (1.32) и подставим в нее выражения (1.38) и (1.39). Получим последовательность равенств:

$$\left(\mathrm{grad}q^i\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}\right) = (h_i\vec{e}_iH_i\vec{e}_i) = h_iH_i(\vec{e}_i\vec{e}_i) = h_iH_i = 1, \qquad 1.40$$

последнее из которых устанавливает справедливость соотношения (1.37).
До сих пор мы придавали значение разложению векторов вида (1.36) по ортонормированному базису. Однако, как показывает теория и практика использования криволинейных координат, в том числе и не ортогональных, существенное значение имеют возможности разложения по тройкам некомпланарных векторов $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}$ либо $\mathrm{grad}q^i$ $(i = 1,2,3)$. Используя первую возможность, получим для вектора $\vec{a}$ представление в виде:

$$\vec{a} = A^1\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1} + A^2\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2} + A^3\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3} \qquad 1.41$$

т. е. разложение по векторам, касательным к соответствующим координатным линиям. Коэффициенты A^1, A^2, A^3 в разложении (1.41) называются **контравариантными составляющими (компонентами)** вектора $\vec{a}$. Реализация второй возможности позволяет записать что:

$$\vec{a} = A_1\mathrm{grad}q^1 + A_2\mathrm{grad}q^2 + A_3\mathrm{grad}q^3, \qquad 1.42$$

т.е. провести разложение по векторам, перпендикулярным соответствующим координатным поверхностям. Коэффициенты A_1, A_2, A_3 в разложении (32) называются **ковариантными составляющими (компонентами)** вектора $\vec{a}$. Еще раз отметим, что соотношения (1.41,1.42) имеют место для любых криволинейных координат, не обязательно ортогональных.
Далее мы вновь ограничимся рассмотрением *ортогональных систем координат* Для того, чтобы подчеркнуть отличие ранее введенных составляющих a_i $(i = 1,2,3)$ в разложении (1.36), имеющих простой физический или геометрический смысл, от контравариантных и ковариантных компонент, для a_i,как уже ранее было определено, используется термин **физические составляющие.**
В ортогональных системах координат векторы $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}$ и $\mathrm{grad}q^i$ совпадают по направлению, однако длины этих векторов, вообще говоря, различаются (1.37), поэтому и наборы коэффициентов разложений A^i в(1.41) и A_i в (1.42) не совпадают. Это различие коэффициентов отражается как в расположении индексов – верхних и нижних, так и названиях коэффициентов разложений.

Наконец, полезно иметь ввиду, что в частном случае прямолинейных прямоугольных координат (декартовы прямоугольные системы координат) мы возвращаемся к термину «составляющие вектора»,так как различие между контравариантными, ковариантными и физическими составляющими исчезает, и следовательно, отпадает необходимость введения этой терминологии.

Докажем это простое утверждение. В рассматриваемом случае *прямолинейных прямоугольных координат* $q^1 = x, q^2 = y$, $q^3 = z$.Принимая во внимание выражение (1) для $\vec{r}$, получаем:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{\imath}, \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{\jmath}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}, \tag{1.43}$$

Т.е. базисные векторы, касательные к координатным линиям, совпадают с тройкой базисных векторов в декартовой прямоугольной системе координат, а потому и контравариантные составляющие равны привычным декартовым составляющим вектора. Так же просто находим базисные векторы второго способа их определения:

$$\mathrm{grad}q^1 = \mathrm{grad}x = \vec{\imath}, \ \mathrm{grad}q^2 = \mathrm{grad}y = \vec{\imath}, \ \mathrm{grad}q^3 = \mathrm{grad}z = \vec{k} \tag{1.44}$$

Из приведенных равенств следует вывод о совпадении соответствующих базисных векторов и равенстве ковариантных составляющих декартовым составляющим вектора. Материал, изложенный в данном параграфе, носит в значительной степени формально абстрактный характер, что естественно с позиций математики, являющейся аппаратом Однако для нас не менее важным, а скорее даже главным, является понимание прикладной значимости введенных понятий. Содержание последующих параграфов и направлено на приобретение навыков практического применения обсуждаемых понятий. Однако, прежде чем начать осуществление этой задачи, потребуется приложить дополнительно небольшие усилия для получения ответов на вопросы, которые помогут восприятию дальнейшего материала.

Прежде всего зададимся вопросом: если мы ввели контравариантные, ковариантные и физические составляющие *одного и того же вектора*, то скорее всего между ними имеются функциональные соотношения, которые желательно было бы установить. Знание таких соотношений между различными составляющими позволило бы при решении прикладных задач, если возникает такая необходимость, переходить от одних составляющих к другим. Ответ на поставленный вопрос положительный, в чем легко убедится на основании простых рассуждений. Из выражения (1.10) следует, что частные производные, присутствующие в (1.41), можно представить как:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \ H_i \vec{e}_i \tag{1.45}$$

Теперь подставим значения частных производных (1.45) в выражение (1.41), в результате получим:

$$\vec{\mathrm{a}} = A^1 H_1 \vec{e}_1 + A^2 H_2 \vec{e}_2 + A^3 H_3 \vec{e}_3 \tag{1.46}$$

Коэффициенты при базисных векторах в полученном выражении согласно определению (1.36), являются физическими составляющими $a_1, a_{2,} a_3$ и, как видно из разложения (1.46), определяются равенствами:

$$a_1 = A^1 H_1, \quad a_2 = A^2 H_2, \; a_3 = A^3 H_3 \qquad 1.47$$

Равенства (1.47) устанавливают связи между контравариантными и физическими составляющими вектора.

Не составляет труда найти формулы, связывающие ковариантные и физические составляющие. С этой целью заменим входящие в разложение (1.42) градиенты их значениями $h_i \vec{e}_i$ $(i = 1{,}2{,}3)$ согласно (1.23). Наконец, воспользовавшись соотношением (1.37), преобразуем представление вектора (1.42) к виду:

$$\vec{a} = \frac{1}{H_1} A_1 \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} A_2 \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} A_3 \vec{e}_3. \qquad 1.48$$

Из (1.48) видно, что физические составляющие определяются через ковариантные составляющие по формулам:

$$a_1 = \frac{1}{H_1} A_1, \quad a_2 = \frac{1}{H_2} A_2, \; a_3 = \frac{1}{H_3} A_3 \qquad 1.49$$

Формулы, связывающие контравариантные и ковариантные составляющие, устанавливаются из сопоставления выражений (1.47,1.49) и, очевидно, имеют вид:

$$A^1 H_1 = \frac{1}{H_1} A_1, \quad A^2 H_2 = \frac{1}{H_2} A_2, \quad A^3 H_3 = \frac{1}{H_3} A_3 \qquad 1.50$$

Полученные равенства справедливы в ортогональных криволинейных координатах, которые, как уже отмечалось, чаще всего используются в приложениях. Тем не менее в пункте 1.5 будут установлены аналоги соотношений (1.50) для общего случая криволинейных координат.

Покажем, что как контравариантные, так и ковариантные составляющие вектора возникают вполне естественным образом. Во многих задачах приходится рассматривать составляющие вектора $d\vec{r}$, т.е. дифференциала векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3)$, определяемого выражением (20), которое для удобства воспроизведем в этом месте:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3} dq^3 \qquad 1.51$$

Так, в механике, $d\vec{r}$ является важнейшей кинематической характеристикой движения, через которую определяются такие понятия, как скорость и ускорение материальной точки.

Контравариантные составляющие вектора $d\vec{r}$ появляются автоматически, как только мы записали выражение (1.51). Действительно, выражение (1.51) есть ни что иное, как разложение вектора $d\vec{r}$ по векторам $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$ (i=1,2,3). Сравнение соотношения (1.51) с представлением (1.41), показывает, что набор величин dq^1, dq^2, dq^3 играет роль контравариантных составляющих A^1, A^2, A^3 в (1.41). Следовательно, дифференциалы dq^1, dq^2, dq^3 криволинейных координат являются контравариантными составляющими вектора $d\vec{r}$. Этот вывод полезно помнить при использовании криволинейных координат в приложениях.

Оставим на время в стороне пример реализации ковариантных составляющих и найдем физические составляющие вектора $d\vec{r}$. Чтобы выполнить эту задачу, следует представить (1.51) в форме разложения вида (1.36) по единичным базисным векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, что достигается заменой частных производных в (1.51) их значениями (1.45). В результате подстановок получим:

$$d\vec{r} = H_1 dq^1 \vec{e}_1 + H_2 dq^2 \vec{e}_2 + H_3 dq^3\ \vec{e}_3 \qquad 1.52$$

Сопоставляя это выражение с разложением (1.36), приходим к выводу, что физические составляющие или проекции вектора $d\vec{r}$ на единичные базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ равны величинам:

$$H_1 dq^1, H_2 dq^2, H_3 dq^3 \qquad 1.53$$

что, конечно же, согласуется с общими равенствами (1.47).
Перейдем к рассмотрению важного случая появления ковариантных составляющих вектора. В приложениях часто возникает ситуация, в которой некоторая векторная величина $\vec{\mathrm{a}}$ равна градиенту скалярного поля u, заданного в криволинейных координатах:

$$\vec{\mathrm{a}} = \ \mathrm{grad} u \qquad 1.54$$

Так, в механике мы встречаемся с положением, когда вектор силы $\vec{F}$ определяется через потенциальную энергию П формулой $\vec{F} = -\mathrm{grad}\ \Pi$, в электростатике напряженность электрического поля $\vec{E}$ и электрический потенциал φ связаны формулой $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$, плотность диффузионного потока частиц $\vec{j} = -\ \mathrm{grad}\ c$, где c концентрация вещества.
Займемся тем, что получим разложение вектора (1.46) по базисным векторам $\mathrm{grad} q^i$ $(i = 1,2,3)$. По условию, скалярная функция u есть функция переменных q^1, q^2, q^3. Обратимся к формулам связи (1.2) и будем рассматривать u как сложную функцию декартовых переменных:

$$u = u\ (q^1, q^2, q^3) = u[q^1(x, y, z),\ q^2(x, y, z), q^3(x, y, z)] \qquad 1.55$$

В декартовых координатах выражение для градиента определяется как:

$$\mathrm{grad} u == \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad 1.56$$

Вычисляя частные производные в этом выражении по правилу вычисления производной сложной функции (1.55), преобразуем (1.56) к виду:

$$\mathrm{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q^3}\frac{\partial q^3}{\partial x}\right)\vec{\imath}$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial q^3}\frac{\partial q^3}{\partial y}\right)\vec{\jmath}$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial q^3}\frac{\partial q^3}{\partial z}\right)\vec{k}, \qquad 1.57$$

и за тем к форме:

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial q^1}\left(\frac{\partial\, q^1}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\, q^1}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\, q^1}{\partial z}\vec{k}\right) + \frac{\partial u}{\partial q^2}\left(\frac{\partial\, q^2}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\, q^2}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\, q^2}{\partial z}\vec{k}\right) +$$
$$\frac{\partial u}{\partial q^3}\left(\frac{\partial\, q^3}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\, q^3}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\, q^3}{\partial z}\vec{k}\right) \qquad 1.58$$

Выражения в круглых скобках в (1.58), принимая во внимание (1.20), заменяем на grad q^i $(i = 1,2,3)$. В результате приходим к интересующему нас разложению вектора:

$$\vec{\mathrm{a}} = \mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial q^1}\mathrm{grad}\, q^1 + \frac{\partial u}{\partial q^2}\mathrm{grad}\, q^2 + \frac{\partial u}{\partial q^3}\mathrm{grad}\, q^3 \qquad 1.59$$

Установленная формула важна в двух отношениях. Во-первых, сопоставляя выражение (1.59) с разложением (1.42), мы вправе сделать утверждение, что частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial q^1}, \frac{\partial u}{\partial q^2}, \frac{\partial u}{\partial q^3} \qquad 1.60$$

являются ковариантными составляющими вектора grad$u$. Мы не раз воспользуемся этим выводом при рассмотрении задач динамики на основе уравнений Лагранжа в пункте 3.6. Во-вторых, нам осталось сделать еще один шаг преобразований, и мы получим выражение для градиента в произвольной ортогональной системе координат в физических составляющих. Действительно, в силу равенств (1.37,1.38) для grad q^i $(i = 1,2,3)$ имеют место равенства:

$$\mathrm{grad}\, q^i = \frac{1}{H_i}\vec{e}_i \qquad 1.61$$

воспользовавшись которыми для преобразования представления (1.59), найдем выражение градиента в произвольной ортогональной криволинейной системе координат:

$$\vec{\mathrm{a}} = \mathrm{grad}u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\vec{e}_3 \qquad 1.62$$

Этим выражением мы воспользуемся в §2 для записи градиента в некоторых частных системах криволинейных координат.

1.5. Законы преобразований контравариантных и ковариантных составляющих вектора. Взаимосвязь контравариантных и ковариантных компонент вектора.

Положим, что вместо исходных криволинейных координат q^1, q^2, q^3 введен новый набор криволинейных координат $\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3$, которые связаны с исходными координатами соотношениями:

$$q^i = q^i(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3) \;\; (i = 1,2,3) \qquad 1.63$$

В таком случае говорят, что формулы (1.63) определяют преобразование координат. Будем считать, что уравнения (1.63) можно разрешить относительно новых переменных $\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3$:

$$\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^1, q^2, q^3) \;\; (i = 1,2,3) \qquad 1.64$$

Преобразование (1.64) называется обратным по отношению к преобразованию координат (1.63).
Следуя выражению (1.41), запишем соответствующее разложение вектора $\vec{a}$ в исходной системе координат q^1, q^2, q^3:

$$\vec{a} = A^1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} + A^2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} + A^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3} = \sum_{i=1}^{3} A^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \qquad 1.65$$

и его же представление в новой системе координат $\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3$:

$$\vec{a} = \tilde{A}^1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}^1} + \tilde{A}^2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}^2} + \tilde{A}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}^3} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{A}^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}^i} \qquad 1.66$$

Согласно определению (1.41), наборы величин A^1, A^2, A^3 и $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \tilde{A}^3$ являются контравариантными составляющими одного и того же вектора $\vec{a}$ в исходной и новой системах криволинейных координат. Зададимся вопросом, как выражаются новые компоненты вектора $\vec{a}$ через исходные?
В целях упрощения записи сумм, подобных тем, что стоят в правых частях равенств (1.65,66) и встретятся при обсуждении поставленного вопроса, условимся, как это принято в математической литературе, опускать знак суммы, подразумевая суммирование по всем значениям дважды повторяющегося индекса. Таким образом, вместо записи

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} A^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$$

будем иметь

$$\vec{a} = A^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \qquad 1.67$$

где по повторяющемуся индексу i подразумевается суммирование от 1 до 3. Аналогично, выражение (1.66) запишется как:

$$\vec{a} = \tilde{A}^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}^i} \qquad 1.68$$

Для частных производных $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$ в выражении (1.67), по правилу вычисления производной сложной функции с использованием нашего соглашения о записи сумм, следует, что

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} \qquad 1.69$$

(Здесь повторяющийся индекс $j = 1,2,3$ и по нему проводится суммирование). Подставив соотношения (1.69) в (1.67), получим разложение вектора $\vec{a}$ по базисным векторам $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}^j}$ новой системы координат:

$$\vec{a} = A^i \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}^j} \qquad 1.70$$

В этом выражении суммирование проводится по двум парам повторяющихся индексов i и j. Очевидно, что сумма не зависит от обозначения индекса суммирования, чем мы и воспользуемся для дальнейших преобразований. В целях сравнения разложения (1.70) с разложением (1.68), поменяем местами индексы i и j в формуле (1.70). В результате заключаем, что

$$\vec{\mathrm{a}} = A^j \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}^i} \tag{1.71}$$

Приравнивая коэффициенты при векторах $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}^i}$ в разложениях вектора $\vec{\mathrm{a}}$ (1.68) и (1.71), приходим к формулам, устанавливающим связи между контравариантными составляющими вектора при переходе от одной системы криволинейных координат к другой:

$$\tilde{A}^i = A^j \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} \tag{1.72}$$

Иными словами нами установлен закон преобразования контравариантных составляющих вектора при преобразовании криволинейных координат (1.63).

Найдем теперь закон преобразования ковариантных составляющих вектора. Представление вектора $\vec{\mathrm{a}}$ с использованием ковариантных составляющих в системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, согласно определению (1.42), имеет вид:

$$\vec{\mathrm{a}} = A_j \mathrm{grad} q^j \tag{1.73}$$

Индекс суммирования целенаправленно выбран как j. В новой системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3\}$ для вектора $\vec{\mathrm{a}}$, по аналогии с (1.73), запишем:

$$\vec{\mathrm{a}} = \tilde{A}_i \mathrm{grad} \tilde{q}^i \tag{1.74}$$

Задача заключается в определении связей между ковариантными составляющими $\tilde{A}_i$ в новой и ковариантными составляющими A_j в исходной системах криволинейных координат. Для начала преобразуем присутствующие в выражении (54) $\mathrm{grad} q^j$ с помощью формулы (1.59), которую приведем здесь в форме:

$$\mathrm{grad} u = \frac{\partial u}{\partial q^i} \mathrm{grad}\, q^i \tag{1.75}$$

Далее, в это выражение, вместо функции u подставим q^j, а q^i заменим на $\tilde{q}^i$,что позволит выразить $\mathrm{grad} q^j$ через $\mathrm{grad} \tilde{q}^i$:

$$\mathrm{grad}\, q^j = \frac{\partial\, q^j}{\partial \tilde{q}^i} \mathrm{grad} \tilde{q}^i \tag{1.76}$$

Теперь подставим это выражение в разложение (1.73), в результате чего приведем его к виду:

$$\vec{\mathrm{a}} = A_j \frac{\partial\, q^j}{\partial \tilde{q}^i} \mathrm{grad} \tilde{q}^i \tag{1.77}$$

Сравнивая представления вектора $\vec{a}$ (1.74) и (1.77), заключаем, что между коэффициентами соответствующих разложений имеет место равенства:

$$\tilde{A}_i = A_j \frac{\partial\, q^j}{\partial \tilde{q}^i}, \qquad 1.78$$

которые и устанавливают закон преобразования ковариантных составляющих при переходе от одной системы координат к другой.
Из сравнения выражений (53) и (59) делаем заключение, что законы преобразований контравариантных и ковариантных составляющих, вообще говоря, различаются, что и оправдывает введение верхних и нижних индексов в обозначениях составляющих вектора.

Ранее, в пункте 1.4, нами были установлены простые соотношения между контравариантными и ковариантными составляющими вектора в ортогональных криволинейных системах координат. Установим аналогичные связи для общего случая криволинейных координат. Обратимся к выражениям (1.41,1.42), которые определяют разложения вектора $\vec{a}$ по линейно независимым системам базисных векторов $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$ либо $\mathrm{grad} q^i$ $(i = 1,2,3)$ соответственно и перепишем их в компактном виде, воспользовавшись принятым соглашением обозначения сумм:

$$\vec{a} = A^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \qquad 1.79$$

и

$$\vec{a} = A_j \mathrm{grad} q^j \qquad 1.80$$

Если разложить каждый из векторов $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$ по базисным векторам $\mathrm{grad} q^j$, и ввести обозначения g_{ij} для коэффициентов разложений, то придем к выражению:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = g_{ij} \mathrm{grad} q^j \qquad 1.81$$

где, напомним, по повторяющемуся индексу j проводится суммирование. Подставим (1.81) в выражение (1.79) и запишем его в виде:

$$\vec{a} = g_{ij}\, A^i \mathrm{grad} q^j \qquad 1.82$$

Сравнивая выражения (1.80) и (1.82), приходим к выводу, что

$$A_j = g_{ij}\, A^i \qquad 1.83$$

Для окончательного решения вопроса необходимо найти неизвестные коэффициенты g_{ij}, и здесь обнаружится значение ранее установленных соотношений (1.32,1.33), которые запишем в виде одной строки

$$\left(\mathrm{grad} q^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}\right) = \delta^i_j \qquad 1.84$$

используя дельта-символ кронекера, определяемый равенствами:

$$\delta_j^i = 1 \text{ при } i = j,\;\; \delta_j^i = 0 \;\text{ при } i \neq j \qquad 1.85$$

Умножим обе части выражения (1.81) скалярно на вектор $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}$ и осуществим простые преобразования, воспользовавшись свойством (1.84):

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}\right) = g_{ij}\;(\mathrm{grad} q^j\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}) = g_{ij}\,\delta_k^j = \; g_{ik} \qquad 1.86$$

или, меняя индекс k на j, перепишем полученное равенство в виде:

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}\right) \qquad 1.87$$

Итак, искомые коэффициенты разложения в выражении (1.81) найдены и определяются равенствами (1.87). Чтобы вычислить их для заданной криволинейной системы координат, следует для $\vec{r}$ воспользоваться выражениями (1.3) и (1.4), которые в рассматриваемой системе криволинейных координат считаются известными и обретают вполне конкретный вид.

Легко видеть, что матрица коэффициентов g_{ij} обладает свойством симметрии:

$$g_{ij} = g_{ji} \qquad 1.88$$

так как согласно (1.86) элементы g_{ij} равны скалярным произведениям векторов и не изменяется при перестановке сомножителей. Набор функций g_{ij}, определенных равенствами (72), называется **ковариантным фундаментальным тензором**. Оправдание этому названию мы дадим после того, как введем определение тензора.

Отметим еще одно, важное для приложений, свойство этого тензора в ортогональных криволинейных координатах. Напомним, что криволинейные координаты называются **ортогональными**, если координатные линии в каждой точке взаимно перпендикулярны. Но это и означает ортогональность векторов $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$, касательных к координатным линиям. Поэтому скалярные произведения в правых частях равенств (1.87) обращаются в нуль при $i \neq j$, т.е. матрица g_{ij} оказывается диагональной. Выясним теперь значения диагональных элементов. При $i = j$, следуя формуле (1.87) и определению коэффициентов Ламэ (1.11), получим, что:

$$g_{ii} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\right) = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial\, q^i}\right|^2 = {H_i}^2 \qquad 1.89$$

Таким образом, в ортогональных криволинейных координатах набор величин g_{ij} представляется матрицей:

$$\begin{pmatrix} {H_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {H_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {H_3}^2 \end{pmatrix} \qquad 1.90$$

диагональные элементы которой равны квадратам значений коэффициентов Ламэ.

На основании отмеченного свойства симметрии (1.88), интересующая нас связь (1.83) между контравариантными и ковариантными составляющими может быть представлена в форме

$$A_j = g_{ij}\,A^i = g_{ji}A^i \qquad 1.91$$

и, наконец, заменой индексов i на j и обратно, придадим соотношениям (1.91) вид:

$$A_i = g_{ij}A^j \qquad 1.92$$

Резонно теперь обратно выразить составляющие вектора A^j через A_i. Переходя к решению этой задачи, обозначим элементы матрицы, обратной матрице с элементами g_{ij}, как g^{ij}. Из определения обратной матрицы следует, что для элементов прямой и обратной матриц имеют место равенства

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j \qquad 1.93$$

которое окажется полезным уже на следующей стадии вычислений. Обратимся к выражению (1.92) и умножим обе его части на g^{ki} (и просуммируем по индексу i):

$$g^{ki}A_i = g^{ki}g_{ij}A^j = \delta^k_j A^j = A^k \qquad 1.94$$

В этой цепочке преобразований использовались свойства (1.93) и (1.85). Таким образом, имеют место формулы:

$$A^i = g^{ij}A_j \qquad 1.95$$

позволяющие при необходимости найти контравариантные составляющие по значениям ковариантных составляющих вектора. Важно помнить, что когда мы говорим о контравариантных и ковариантных составляющих вектора, то имеем ввиду различные составляющие одного и того же вектора. Это следует как из самих определений (1.41,1.42) соответствующих составляющих, так и наличия связей (75,78) между ними.
Коль скоро мы признали полезным использование контравариантных и ковариантных составляющих как способа задания векторов, то следует развить технику вычисления по *этим составляющим* таких важных понятий векторной алгебры, как квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками пространства, длина вектора, угол между векторами, скалярное и векторное произведение. Ниже мы рассмотрим некоторые из них и увидим, что во всех формулах их вычисления фигурирует фундаментальный тензор g_{ij}, так что использование в названии термина фундаментальный вполне уместно.
Начнем с вывода формулы для квадрата длины между двумя бесконечно близкими точками или квадрата элемента длины. при этом будем исходить из известной нам метрики трехмерного эвклидова пространства. Пусть $d\vec{r}$ вектор, соединяющий эти точки. Для вектора $d\vec{r}$ имеем выражение(1.28), которое приведем здесь в форме:

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}dq^i \qquad 1.96$$

Напомним, что dq^i в (1.96) являются контравариантными составляющими вектора $d\vec{r}$. Введем обозначение ds^2 для квадрата длины между двумя бесконечно близкими точками.

По определению (в эвклидовом простанстве) ds^2 равен квадрату длины вектора $d\vec{r}$, который в свою очередь равен скалярному произведению $(d\vec{r}\ d\vec{r})$. Следовательно, ссылаясь на (1.96), можно записать, что:

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = (d\vec{r}\ d\vec{r}) = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i} dq^i \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^j} dq^j\right) = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^j}\right) dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j \qquad 1.97$$

В последнем равенстве мы воспользовались выражением (1.87). Итак, квадрат элемента длины определяется контравариантными составляющими dq^i по формуле (1.97) и заранее найденному фундаментальному тензору для выбранной системы криволинейных координат.
Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о вычислении значения длины какого-либо вектора по его контравариантным или ковариантным составляющим. Будем считать для определенности, что вектор $\vec{a}$ определен контравариантными составляющими A^i.
Выберем вектор $d\vec{r}$, контравариантные составляющие которого равны dq^i, совпадающим по направлению с вектором $\vec{a}$. Такой выбор означает, что составляющие dq^i пропорциональны составляющим A^i:

$$dq^i = \lambda A^i \qquad 1.98$$

Величина λ при переходе от одной системы координат к другой остается инвариантной (неизменной), так как составляющие в обеих частях равенства (1.98) преобразуются по одному и тому же закону преобразования.
В силу того что составляющие dq^i в λ раз больше составляющих A^i, следует считать, что квадрат длины вектора $d\vec{r}$ в λ^2 раз превосходит квадрат длины вектора $\vec{a}$, т.е.:

$$|d\vec{r}|^2 = \lambda^2 |\vec{a}|^2 \qquad 1.99$$

Мы уже показали, что квадрат длины вектора $d\vec{r}$ находится по его составляющим dq^i на основе формулы (1.97). Воспользуемся выражением (1.97) и заменим dq^i их значениями (1.98):

$$|d\vec{r}|^2 = g_{ij} dq^i dq^j = \lambda^2 g_{ij} A^i A^j \qquad 1.100$$

Подставляя выражение (1.100) в левую часть соотношения (1.99) и сокращая на λ^2, получим интересующее нас выражение для квадрата длины вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}|^2 = g_{ij} A^i A^j \qquad 1.101$$

и, как следствие, формулу, позволяющую находить длину вектора по заданным контравариантным составляющим:

$$|\vec{a}| = \sqrt{g_{ij} A^i A^j} \qquad 1.102$$

Правую часть (1.102) можно преобразовать, если воспользоваться соотношениями (1.93,1.95). В таком случае получим еще два выражения, по которым рассчитывается длина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{g^{ij}A_iA_j} = \sqrt{A^iA_i} \qquad 1.103$$

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по их контравариантным составляющим A^i и B^i соответственно. Представим каждый вектор в виде (1.67) и составим скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = \left(A^i \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}\, B^j \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^j}\right) = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^j}\right) A^iB^j = g_{ij}A^iB^j \qquad 1.104$$

При переходе к последнему равенству мы воспользовались выражением (1.87). Таким образом, скалярное произведение двух векторов находится по составляющим векторов согласно следующим выражениям:

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = g_{ij}A^iB^j = A^iB_i = A_kB^k = g^{ij}A_iB_j \qquad 1.105$$

разнообразие форм записи которых есть следствие соотношений (1.93,1.95). Условие ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которое эквивалентно равенству нулю скалярного произведения, следует из (1.105) и имеет вид:

$$g_{ij}A^iB^j = A^iB_i = A_kB^k = g^{ij}A_iB_j = 0 \qquad 1.106$$

Что касается вопроса вычисления угла φ между двумя векторами, то остается всего лишь воспользоваться равенствами (1.102,1.105) и известной формулой векторной алгебры, согласно которой имеем:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\sqrt{g_{ij}B^iB^j}} = \frac{A^iB_i}{\sqrt{A^iA_i}\sqrt{B^iB_i}} = \frac{g^{ij}A_iB_j}{\sqrt{g^{ij}A_iA_j}\sqrt{g^{ij}B_iB_j}} \qquad 1.107$$

1.6. Общее определение вектора и тензора.

Преобразования координат, определяемые формулами (1.72,1.78), позволят нам иначе ввести определение вектора, и, что принципиально важно, ввести понятие тензора.

Всюду выше, употребляя термин вектор, мы естественно имели ввиду объект, определяемый как направленный отрезок, т.е.использовали это понятие в смысле определения векторной алгебры, и как следствие, получили соотношения (1.72,1.78). Важно, что обсуждаемое определение, имеющее простой геометрический смысл, не использует какой либо системы координат (логика построения теории векторной алгебры и векторного анализа стремится максимально избавиться от координатной системы, обеспечивая тем самым независимость выводов и результатов теории от выбранной системы координат).

В процессе развития целого ряда научных направлений в математике, механике и физике выяснилось, что многие задачи приводят к классу объектов (тензоры) более сложного характера, нежели вектор, и включающего последний как частный случай. Однако дать простое геометрическое представление для этого класса объектов и положить его в основу определения тензора, в отличие от векторов, в общем случае не представляется возможным. Поэтому, как альтернатива, используется аналитический подход к построению определения тензора, который предполагает использование координатных систем. Как первый шаг на этом пути необходимо ввести новое - (конечно же эквивалентное выше приведенному) аналитическое определение вектора, простое в математическом отношении обобщение которого и приводит к понятию тензора. Пусть в некоторой системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$ контравариантные составляющие некоторого вектора $\vec{\mathrm{a}}$ равны A^i, так что:

$$\vec{\mathrm{a}} = A^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \qquad 1.108$$

В другой системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3\}$ новые контравариантные составляющие $\tilde{A}^i$ того же самого вектора $\vec{\mathrm{a}}$ будут, в соответствии с (1.72), выражаться формулами

$$\tilde{A}^i = A^j \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} \qquad 1.109$$

Если, наоборот, задать один вектор в системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$ составляющими A^i, а другой вектор определить в системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3\}$ контравариантными составляющими $\tilde{A}^i$, связанными с A^i соотношениями (1.109), то эти два вектора будут тождественными. Иными словами мы вправе считать, что составляющие A^i и $\tilde{A}^i$, связанные соотношениями (1.109), определяют один и тот же вектор. Это обстоятельство позволяет ввести новое, аналитическое определение вектора, эквивалентное геометрическому определению, при этом мы дадим обобщение на случай криволинейных систем координат в -мерном пространстве:
если для каждой системы координат $\{q^1, q^2, \dots, q^n\}$ определена совокупность n функций $A^1, A^2, \dots, A^n$, так что для системы координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n\}$ имеется свой набор функций $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \dots, \tilde{A}^n$, и если при преобразовании координат

$$q^i = q^i(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n) \quad (i = 1,2, \dots, n) \qquad 1.110$$

эти функции преобразуются по закону

$$\tilde{A}^i = A^j \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} \;\; (i, j = 1,2, \dots, n) \qquad 1.111$$

то говорят, что совокупность величин $A^1, A^2, \dots, A^n$, определяет вектор, а сами величины A^i называют контравариантными составляющими или компонентами вектора.
Итак, в основу определения положен закон преобразования (1.72), расширенный на случай пространства n измерений.
С таким же успехом мы могли бы в наших рассуждениях, начиная с формулы (1.108), если заменить ее на выражение (1.73), а вместо (1.109) использовать закон преобразования (1.78), воспользоваться ковариантными составляющими. В таком случае пришли бы к заключению, что если задать один вектор в системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$ составляющими A_i, а другой вектор определить в системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3\}$ ковариантными составляющими $\tilde{A}_i$, связанными с A_iсоотношениями (59), то эти два вектора будут тождественными. Поэтому в равной степени можно определить вектор в следующей редакции:
если для каждой системы координат $\{q^1, q^2, \dots, q^n\}$ определена совокупность n функций, $A_1, A_2, \dots, A_n$ так что для системы координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n\}$ имеется свой набор функций,$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$, и если при преобразовании координат

$$q^i = q^i(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n) \quad (i = 1,2,\dots,n) \qquad 1.112$$

эти функции преобразуются по закону

$$\tilde{A}_i = A_j \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i} \ \ (i,j = 1,2,\dots,n) \qquad 1.113$$

то говорят, что совокупность величин $A_1, A_2, \dots, A_n$, определяет вектор, а сами величины A_i называют ковариантными составляющими или компонентами вектора.

Прежде чем мы перейдем к определению тензора, рассмотрим примеры, которые позволят уяснить принципы, положенные в основу определения тензоров. Обратимся к уже знакомому нам выражению (1.97) для квадрата элемента длины между двумя бесконечно близкими точками. Расстояние между двумя точками не зависит от системы координат в которой проводятся вычисления. В силу этого имеет место равенство:

$$\tilde{g}_{kl} d\tilde{g}^k d\tilde{g}^l = g_{ij} dq^i dq^j \qquad 1.114$$

левая часть которого есть квадрат элемента длины, рассчитанный в системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n\}$, а правая часть, та же величина, записанная в системе координат $\{q^1, q^2, \dots, q^n\}$. Установим соотношения между элементами g_{ij} при переходе от одной системы координат к другой. Используя контравариантный характер преобразований дифференциалов dq^i, находим, что:

$$dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{g}^k} \, d\tilde{g}^k \,, \qquad dq^j = \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{g}^l} \, d\tilde{g}^l \qquad 1.115$$

после подстановки которых в правую часть (1.114) получаем:

$$\tilde{g}_{kl} d\tilde{g}^k d\tilde{g}^l = g_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{g}^k} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{g}^l} \, d\tilde{g}^k \, d\tilde{g}^l \qquad 1.116$$

В силу произвольности значений $d\tilde{g}^i$, делаем заключение о равенстве коэффициентов при произведениях соответствующих дифференциалов $d\tilde{g}^k d\tilde{g}^l$ в (1.116). В результате найдем интересующий нас закон преобразования элементов g_{ij} при преобразованиях координат:

$$\tilde{g}_{kl} = g_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{g}^k} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{g}^l} \qquad 1.117$$

Заметим, что в этот закон преобразования входят в определенных комбинациях те же частные производные, что и в формуле преобразования ковариантных составляющих вектора (1.115). С другой стороны, мы имеем некий новый объект, задаваемый в каждой системе координат своей совокупностью величин g_{ij}, преобразующихся при замене системы координат по более сложным формулам (1.117) в сравнении с (1.115). В формуле (1.117) присутствуют произведения частных производных одного и того же вида: производные по новым координатам от старых координат. Именно такой вид производных входит в определение ковариантных составляющих вектора (1.113); по этой причине мы расположили оба индекса k и l в выражении (1.117) снизу. Уже этот пример наводит на мысль о возможности введения классификации совокупности величин по законам их преобразования. Однако этим множество законов преобразования далеко не исчерпывается, в чем мы убедимся на ниже следующих примерах физического содержания.

В изотропной проводящей среде закон Ома, записанный в дифференциальной форме, определяет связь между вектором плотности электрического тока $\vec{j}$ и вектором напряженности электрического поля $\vec{E}$ в данной точке среды и формулируется в виде уравнения:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{1.118}$$

Коэффициент пропорциональности σ в этом уравнении называется электрической проводимостью среды и, в случае изотропной в электрическом отношении среды, является скалярной величиной. В таком случае векторы $\vec{j}$ и $\vec{E}$, как это следует из уравнения (1.118), параллельны, т.е. каждая составляющая плотности тока j^k пропорциональна той же составляющей вектора напряженности электрического поля E^k:

$$j^k = \sigma E^k \tag{1.119}$$

с одним и тем же коэффициентом пропорциональности σ. Как видно из обозначений, соотношения (1.119) приведены в форме, использующей контравариантные составляющие векторов $\vec{j}$ и $\vec{E}$. В равной степени можно было бы использовать ковариантные составляющие, и выбор контравариантных составляющих сделан лишь для целей конкретизации дальнейших выкладок. В анизотропной среде вектор плотности тока в общем случае не параллелен вектору напряженности электрического поля; каждая составляющая плотности электрического тока, вообще говоря, зависит от всех составляющих вектора напряженности поля, что может быть выражено следующими линейными зависимостями составляющих плотности тока j^k от составляющих вектора напряженности E^l:

$$j^k = \sigma^k_l E^l, \quad (k, l = 1,2,3) \tag{1.120}$$

или, в развернутом виде записи:

$$\begin{aligned} j^1 &= \sigma^1_1 E^1 + \sigma^1_2 E^2 + \sigma^1_3 E^3 \\ j^2 &= \sigma^2_1 E^1 + \sigma^2_2 E^2 + \sigma^2_3 E^3 \\ j^3 &= \sigma^3_1 E^1 + \sigma^3_2 E^2 + \sigma^3_3 E^3 \end{aligned} \tag{1.121}$$

Набор девяти величин σ^k_l представим в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} \sigma^1_1 & \sigma^1_2 & \sigma^1_3 \\ \sigma^2_1 & \sigma^2_2 & \sigma^2_3 \\ \sigma^3_1 & \sigma^3_2 & \sigma^3_3 \end{pmatrix} \tag{1.122}$$

в связи с чем соотношение (1.120) можно записать как произведение введенной матрицы на вектор столбец, составленный из компонент вектора $\vec{E}$:

$$\begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{pmatrix} \qquad 1.123$$

В обозначении σ_l^k мы расположили индекс k вверху из эстетических соображений - в левой части формулы (1.120) этот индекс находится сверху, однако в дальнейшем выяснится более глубокий смысл такой расстановки индексов в σ_l^k. Выписывая уравнение (1.120), мы не опирались на какую-либо частную систему координат. Но очевидно, что в каждой конкретной системе координат реализуются свои наборы составляющих векторов плотности тока и напряженности поля, присутствующие в уравнениях (1.120), а следовательно и свои наборы чисел σ_l^k (в данной точке среды). Итак, приходим к выводу, что проводимость с позиции математического описания есть совокупность чисел σ_l^k (в данной точке среды), определенных для каждой системы координат. Коль скоро наборы чисел, о которых идет речь, определены в каждой системе координат, то естественно поставить вопрос, как по известному набору чисел σ_l^k в одной системе координат найти их значения в любой другой системе координат, иными словами получить закон преобразования σ_l^k при смене координат. Перейдем к ответу на поставленный вопрос. Будем считать, что соотношения (1.120) относятся к системе координат $\{q^1, q^2, q^3\}$, а соотношения

$$\tilde{j}^s = \tilde{\sigma}_n^s \tilde{E}^n \qquad 1.124$$

к системе координат $\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3\}$.
Согласно закону преобразования контравариантных составляющих (1.111), можно записать, что:

$$\tilde{j}^k = j^m \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^m}, \quad \tilde{E}^l = E^n \frac{\partial \tilde{q}^l}{\partial q^n} \qquad 1.125$$

и обратно:

$$j^k = \tilde{j}^m \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^m}, \quad E^l = \tilde{E}^n \frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n} \qquad 1.126$$

Подставим выражения (1.126) в левую и правую части закона Ома (1.120). В результате получим:

$$\tilde{j}^m \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^m} = \sigma_l^k \tilde{E}^n \frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n} \qquad 1.127$$

Далее приведем это соотношение к виду (1.124), что достигается умножением обеих сторон равенства (1.127) на $\frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k}$ и последующим суммированием по индексу k:

$$\tilde{j}^m \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^m} \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} = \sigma_l^k \tilde{E}^n \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} \frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n} \qquad 1.128$$

Воспользуемся тем, что:

$$\frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^m} \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} = \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial \tilde{q}^m} = \delta_m^s \qquad 1.129$$

и преобразуем уравнение (1.128) к виду:

$$\tilde{j}^{s} = \sigma_l^k \tilde{E}^n \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} \frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n} \qquad 1.130$$

Из сравнения выражений (1.124) и (1.130) делаем вывод о равенстве правых частей, которое запишем в форме

$$\tilde{\sigma}_n^s \tilde{E}^n = \sigma_l^k \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} \frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n} \tilde{E}^n \qquad 1.131$$

Наконец, в силу произвольности значений контравариантных составляющих вектора напряженности $\tilde{E}^n$, установим искомое соотношение между элементами $\tilde{\sigma}_n^s$ и σ_l^k:

$$\tilde{\sigma}_n^s = \sigma_l^k \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} \frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n} \qquad 1.132$$

В целях дальнейшего обсуждения полученного результата нам удобнее будет переименовать обозначения индексов в формуле (1.132) и представить ее в виде:

$$\tilde{\sigma}_l^k = \sigma_j^i \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l} \qquad 1.133$$

Теперь сравним полученный закон преобразования набора элементов σ_j^i с ранее найденным законом преобразования (1.117) элементов g_{ij}. Различие между обсуждаемыми формулами преобразований проявляется в том, что выражение (1.133) содержит произведения как частных производных вида $\frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i}$, определяющих контравариантный характер преобразования составляющих вектора (1.111), так и производных $\frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^n}$, связанных с ковариантным типом преобразований (1.113). Этим отличием законов преобразований обусловлено и расположение индексов в выражении (1.133) в сравнении с таковым в формуле (1.117). Верхний индекс указывает контравариантный тип преобразований (индекс k в формуле (1.133)), нижний индекс отмечает ковариантный закон преобразований (индекс l в формуле (1.133)).
Записав дифференциальный закон Ома в форме (1.120), мы, как уже отмечалось, воспользовались контравариантными составляющими векторов $\vec{j}$ и $\vec{E}$. Однако ни что не мешает воспользоваться, например, ковариантными составляющими напряженности электрического поля E_l и контравариантными составляющими плотности тока j^k, придав следующий вид математической форме записи упомянутого закона:

$$j^k = \sigma^{kl} E_l \qquad 1.134$$

Наконец, с тем же основанием мы могли бы записать выражение:

$$j_k = \sigma_{kl} E^l \qquad 1.135$$

если бы решили использовать ковариантные составляющие плотности тока и контравариантные составляющие вектора напряженности поля. Выражения (1.134,1.135), по аналогии с выражением (1.123) также можно представить в матричной форме записи. Не вдаваясь в подробности вычислений, последовательность которых полностью повторяет выкладки, приведшие нас к формулам преобразования (1.133), приведем здесь законы преобразований величин σ^{kl} и σ_{kl}:

$$\tilde{\sigma}^{kl} = \sigma^{ij} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \frac{\partial \tilde{q}^l}{\partial q^j} \qquad 1.136$$

$$\tilde{\sigma}_{kl} = \sigma_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l} \qquad 1.137$$

Ниже, после того как мы введем понятие тензора, величинам σ_l^k, σ^{kl}, σ_{kl} присвоим соответствующие названия. Подчеркнем, что на данном этапе важными для нас являются лишь законы преобразований, определяемые формулами (1.133, 1.136, 1.137).
Обратимся к примеру из электростатики и пусть мы имеем дело с анизотропным диэлектриком. Важной характеристикой поля в диэлектрической среде является вектор электрической индукции $\vec{D}$, который в случае анизотропной среды, вообще говоря, не параллелен вектору электрической напряженности $\vec{E}$. В линейном приближении составляющие вектора $\vec{D}$ линейно зависят от составляющих вектора $\vec{E}$. Последнее означает соотношения вида:

$$D^k = \varepsilon_l^k E^l \qquad 1.138$$

определяющие связи контравариантных составляющих вектора индукции и вектора напряженности электрического поля; ε_l^k- набор чисел, характеризующий диэлектрические свойства среды. Соотношения (1.138) между составляющими вектора напряженности электрического поля и вектора индукции, находят свое применение, например, в кристаллооптике. Объяснения таких фактов, как возможность распространения в заданном направлении двух плоских линейно поляризованных волн с различными скоростями переноса энергии световых лучей, или явление двойного лучепреломления на границе изотропной и анизотропной сред, основано на использовании уравнений связи (1.138).
Выражения (1.120) и (1.138) отличаются лишь обозначениями, поэтому закон преобразования величин ε_l^k и установленный ранее закон преобразования (1.133) величин σ_l^k совпадают. На этом основании можно утверждать, что формулы, выражающие закон преобразования величин ε_l^k, имеют вид:

$$\tilde{\varepsilon}_l^k = \varepsilon_j^i \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l} \qquad 1.139$$

Рассмотрим еще один пример, относящийся к теории упругости. Выделим в теле элемент объема, ограниченный замкнутой поверхностью. Выберем на ней элемент поверхности, положение которого зададим вектором внешней единичной нормали $\vec{n}$. Обозначим силу, действующую на единицу площади выделенного элемента поверхности вектором $\vec{T}$, и назовем эту величину напряжением. Вектор напряжения в газовых и жидких средах направлен в сторону, противоположную вектору внешней нормали $\vec{n}$ и его абсолютная величина, называемая давлением p, не зависит от ориентации единичной площадки, что собственно и составляет содержание закона Паскаля. Отмеченное свойство газовых и жидких сред, при использовании контравариантных составляющих вектора $\vec{T}$ и вектора нормали $\vec{n}$, запишем в виде последовательности равенств:

$$T^i = -pn^i = -p\delta^i_j n^j \qquad 1.140$$

из которых последнее понадобится несколько позже. Однако в случае анизотропных тел вектор напряжения, вообще говоря, не будет совпадать с направлением нормали, более того, каждому направлению нормали соответствует свой вектор напряжения. В общем случае любая составляющая T^i зависит от всех составляющих вектора $\vec{n}$, что можно представить в виде:

$$T^i = \tau^i_j n^j \qquad 1.141$$

Обсудим значение формулы (1.141). Для приложений важным является ответ на вопрос определения напряжения $\vec{T}$ для любого направления вектора нормали к единичной площадке, который дается выражением (1.141). Из формулы (1.144) видно, что для определения составляющих T^i вектора $\vec{T}$ необходимо знание набора девяти величин τ^i_j, которые находятся как решения соответствующих уравнений механики сплошных сред. Что касается закона преобразования величин τ^i_j, то из сравнения выражений (1.120) и (1.141), которые разнятся лишь обозначениями, немедленно следует вывод о виде формул преобразования величин τ^i_j, которые совпадают с выражением (1.133) преобразований величин σ^k_l, т.е.:

$$\tilde{\tau}^k_l = \tau^i_j \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l} \qquad 1.142$$

Если воспользоваться другими комбинациями контравариантных и ковариантных составляющих векторов напряжения и нормали к единичной площадке, то в дополнение к выражению (1.141) получим соотношения вида:

$$T^i = \tau^{ij} n_j \qquad 1.143$$

$$T_i = \tau_{ij} n^j \qquad 1.144$$

Относительно законов преобразования набора элементов τ^{ij} и τ_{ij} можно сделать заключение, что они, по не раз упоминавшейся причине, совпадают с законами преобразований (1.136,1.137) величин σ^{ij} и σ_{ij}.
Основной вывод, который мы преследовали сделать из выше рассмотренных примеров, заключается в том, что наборы элементов $\sigma^{ij}, \varepsilon^{ij}$ и τ^{ij}, которые относятся к описанию различных категорий физических свойств тел, подчиняются одному и тому же закону преобразования элементов. Точно также, по своим законам, преобразуются наборы элементов $\sigma^i_j, \varepsilon^i_j, \tau^i_j$ и σ_{ij}, ε_{ij}, τ_{ij}. Эта формальная общность законов преобразований порождает возможность рассматривать их как один класс математических объектов – так называемых тензоров, к определению которых мы и перейдем.

Если для каждой системы координат q^{α} определена совокупность n^2 функций $A^{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат

$$q^{\alpha} = q^{\alpha}(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n) \quad (\alpha = 1,2, \dots, n) \qquad 1.145$$

преобразуются по формулам

$$\tilde{A}^{ik} = A^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^{\beta}} \qquad 1.146$$

то будем говорить, что эти функции являются контравариантными составляющими тензора второго ранга в пространстве n измерений.

Термин «второго ранга» указывает на число индексов в обозначении составляющих тензора $A^{\alpha\beta}$.

Сравнивая законы преобразований набора величин $\sigma^{ij}, \varepsilon^{ij}$ и τ^{ij}, определяемые формулами (1.136, 1.139, 1.142) с соотношениями (1.146), приходим к заключению, что каждая из совокупностей величин $\sigma^{ij}, \varepsilon^{ij}, \tau^{ij}$ представляет собой контравариантные составляющие тензора проводимости, диэлектрической проницаемости и тензора напряжений соответственно.

Дадим теперь определение ковариантных составляющих тензора второго ранга.

Если для каждой системы координат q^{α} определена совокупность n^2 функций $A_{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат

$$q^{\alpha} = q^{\alpha}(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n) \quad (\alpha = 1,2, \dots, n) \qquad 1.147$$

преобразуются по формулам

$$\tilde{A}_{ik} = A_{\alpha\beta} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial \tilde{q}^i} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial \tilde{q}^k} \qquad 1.148$$

то будем говорить, что эти функции являются ковариантными составляющими тензора второго ранга в пространстве n измерений.

Ранг равен числу индексов, присутствующих в обозначении составляющих $A_{\alpha\beta}$.

Формулы (1.137), определяющие законы преобразований элементов σ_{kl}, совпадают с формулами преобразований (1.148) в только что приведенном определении. Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что это утверждение справедливо и в отношении величин $\varepsilon_{kl}, \tau_{kl}$. На этом основании можно утверждать, что $\sigma_{kl}, \varepsilon_{kl}, \tau_{kl}$ следует рассматривать как ковариантные составляющие тензоров проводимости, диэлектрической проницаемости и тензора напряжений, каждый из которых есть тензор второго ранга.

Ведем еще понятие смешанного тензора второго ранга, а именно:

если для каждой системы координат q^{α} определена совокупность n^2 функций A^{α}_{β}, которые при преобразовании координат

$$q^{\alpha} = q^{\alpha}(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n) \quad (\alpha = 1,2, \dots, n) \qquad 1.149$$

преобразуются по формулам

$$\tilde{A}^{i}_{k} = A^{\alpha}_{\beta} \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial \tilde{q}^k} \qquad 1.150$$

то будем говорить, что эти функции являются смешанными составляющими тензора второго ранга в пространстве n измерений.
В силу этого определения совокупности функций $\sigma_j^i, \varepsilon_j^i, \tau_j^i$ будем называть смешанными составляющими соответственно тензоров проводимости, диэлектрической проницаемости и тензора напряжений.
Теперь можно пойти по пути дальнейшего обобщения понятий тензора второго ранга и ввести определение тензора ранга $(p+q)$: p-раз контравариантного и -раз ковариантного. Приведем его в следующей редакции:
если для каждой системы координат q^α определена совокупность $n^{(p+q)}$ функций $A^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p}_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_q}$, которые при преобразовании координат

$$q^\alpha = q^\alpha(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n) \quad (\alpha = 1,2,\dots,n) \qquad 1.151$$

преобразуются по формулам

$$\tilde{A}^{i_1,i_2,\dots,i_p}_{k_1,k_2,\dots,k_p} = A^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p}_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_q} \frac{\partial \tilde{q}^{i_1}}{\partial q^{\alpha_1}} \frac{\partial \tilde{q}^{i_2}}{\partial q^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial \tilde{q}^{i_p}}{\partial q^{\alpha_p}} \frac{\partial q^{\beta_1}}{\partial \tilde{q}^{k_1}} \frac{\partial q^{\beta_2}}{\partial \tilde{q}^{k_2}} \cdots \frac{\partial q^{\beta_q}}{\partial \tilde{q}^{k_q}} \qquad 1.152$$

то будем говорить, что эти функции являются -раз контравариантными и q-раз ковариантными смешанными составляющими тензора ранга $(p+q)$ в пространстве n измерений.
. Заметим теперь, что с точки зрения общего определения, вектор, задаваемый компонентами A^α, можно назвать контравариантным тензором первого ранга, а в случае задания составляющими A_α будем называть вектор ковариантным тензором первого ранга.
Во всех ранее рассмотренных примерах составляющие тензоров проводимости, диэлектрической проницаемости и тензора натяжений возникли как величины, связывающие составляющие одного вектора с составляющими другого вектора. Характер связей в обсуждаемых примерах в математическом отношении одинаков и укладывается, в зависимости от выбора формы записи векторов в ковариантных или контравариантных составляющих, в одно из следующих соотношений:

$$B^k = \alpha^{kl} A_l \qquad 1.153$$

$$B_k = \alpha_{kl} A^l \qquad 1.154$$

$$B^k = \alpha^k_l A^l \qquad 1.155$$

Было установлено, и это главное, что наборы величин $\alpha^{kl}, \alpha_{kl}, \alpha^k_l$ при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по законам (1.146,1.148,1.150), иными словами являются тензорами второго ранга дважды контравариантным, дважды ковариантным и тензором смешанного типа соответственно.
Таким образом, можно сделать утверждение в форме теоремы:
если для любого вектора A_l величины $\alpha^{kl} A_l$ образуют составляющие контравариантного вектора B^k, то α^{kl} суть составляющие контравариантного тензора.
Аналогичные утверждения имеют место и при выполнении соотношений (1.154,1.155) *в которых идет речь о тензорном характере величин α_{kl} и α^k_l.*

Эта теорема оказывается полезным критерием распознания тензорной природы различных величин, что мы продемонстрируем на примере в пункте 3.5. Наконец, заметим, что в тензорной алгебре устанавливается совокупность теорем, обобщающих выше приведенный критерий на случай тензоров любого ранга.

В рамках изложенного материала, относящегося к тензорному исчислению, мы достаточно подробно рассмотрели исходные понятия, такие как контравариантные и ковариантные составляющие вектора, их связь с физическими составляющими в ортогональных координатах, определили понятие тензора. Этих сведений вполне достаточно для решения широкого спектра задач механики движения частиц.

Понятие тензора заключает в себе важное прикладное значение, которое можно оценить на уровне следующих рассуждений. Вновь обратимся к уравнениям (1.120, 1,138, 1,141). Каждое из них является материальным уравнением, описывающим физическое явление или состояние среды. Уравнение (1.120) есть обобщение дифференциального закона Ома, (1.138) - материальное уравнение Максвелла в анизотропной диэлектрической среде, тензор τ_j^i в (1.141) описывает напряженное состояние тела. В перечисленных уравнениях присутствуют тензоры электрической проводимости, диэлектрической проницаемости и тензор напряжений, которыми характеризуются свойства среды при исследовании процесса протекания электрического тока, при наличии электрического поля или напряженного состояния соответственно. Так как каждый из перечисленных тензоров есть тензор второго ранга, то становится понятым, что состояние среды задается не более, чем девятью величинами и, что особенно важно, закон преобразования этих величин известен. Это обстоятельство позволяет, в целях упрощения аналитического исследования процесса, перейти к такой системе координат, в которой тот или иной тензор принимает в определенном смысле наиболее простой вид – например матрица, соответствующая тензору, становится диагональной (в этом случае говорят о диагональном тензоре). Так, в физической оптике анизотропных однородных кристаллов (в кристаллооптике), при изучении распространения электромагнитных волн в прозрачных средах (не поглощающих световые волны), доказывается, что тензор диэлектрической проницаемости симметричный:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \qquad !.156$$

и его составляющие вещественные величины. Таким образом, он определяется не более чем шестью величинами в любой системе координат. Ограничимся далее изучением тензора ε_{ij} в прямоугольных декартовых координатах и воспользуемся теоремой линейной алгебры, согласно которой для любой симметричной вещественной матрицы существует такая ортогональная система декартовых координат, в которой она принимает диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \qquad 1.157$$

В нашем случае речь идет о матрице, соответствующей тензору ε_{ij}. Назовем эту систему координат системой главных осей или главных направлений. Итак, тензор диэлектрической проницаемости однородного прозрачного кристалла в системе главных осей определяется тремя числами. Именно этой системе координат отдают предпочтение в исследованиях по распространению световых волн в анизотропных кристаллах.

§2. Примеры криволинейных ортогональных координат.

В качестве частных примеров криволинейных ортогональных координат, важных с точки зрения решения прикладных задач, рассмотрим цилиндрические и сферические координаты.

2.1.Цилиндрические координаты.

В цилиндрических координатах положение точки задается тремя координатами

$$\begin{aligned} q^1 &= \rho \qquad \rho \geq 0 \\ q^2 &= \varphi \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ q^3 &= z \quad -\infty < z < \infty \end{aligned} \qquad 2.1$$

,

имеющими следующий геометрический смысл (рис.3): ρ-расстояние от точки P до оси z, φ-угол, отсчитываемый против хода часовой стрелки между положительным направлением оси x и проекцией на плоскость xoy радиус-вектора, проведенного в точку P, $z -$ координата декартовой системы координат.

В целях изучения цилиндрических координат наметим программу действий, которая полностью повторяет ход рассуждений выше изложенной общей теории: на первом шаге установим вид зависимостей координат x, y, z от криволинейных координат ρ, φ, z, далее рассмотрим расположение координатных линий и поверхностей, что позволит представить пространственное расположение базисных векторов. На заключительном этапе вычислим коэффициенты Ламэ и дадим вывод математической формы записи единичных базисных векторов. На основе полученных выражений для единичных базисных векторов докажем свойство ортогональности цилиндрических координат.

Формулы (1.3) общей теории теперь приобретают конкретный вид:

$$x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,,\ z = z, \qquad 2.2$$

что легко установить из геометрических соображений следуя рис.3.На этом же рисунке показаны три координатные линии: $\rho, \varphi,$ и z- линии, проходящие через заданную точку P.

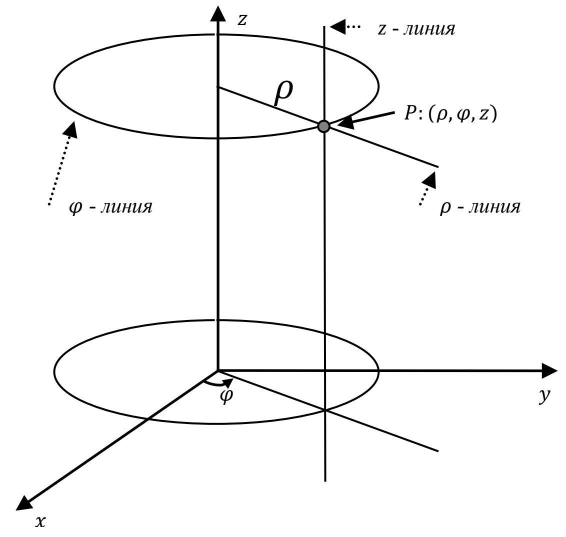


Рис. 3

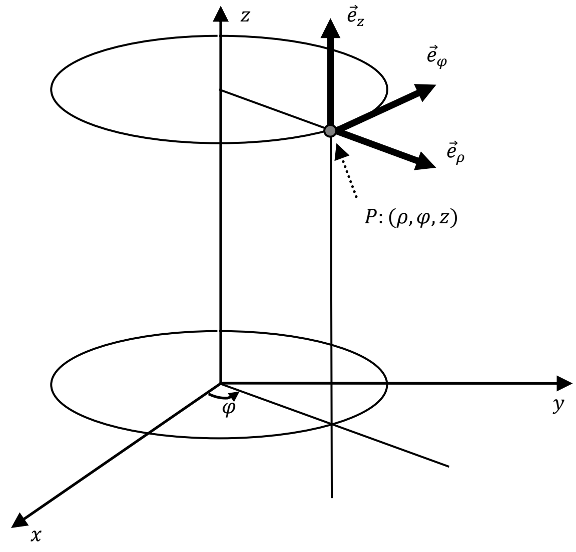


Рис. 4

Рекомендуем убедиться, что вдоль каждой из них изменяется по одной криволинейной координате. Пусть точка P определена координатами ρ, φ, z. Координатная поверхность $q^1 = \rho = Const.$ есть геометрическое место точек, равноудаленных от оси z и представляет собой поверхность цилиндра радиуса ρ, что и обусловливает название этих координат. Поверхность $q^2 = \varphi = Const.$ это полуплоскость, (составляющая угол φ с осью x) проходящая через ось z и точку P. Координатная поверхность $q^3 = z = Const. -$ плоскость, проходящая через точку P параллельно плоскости xOy. Теперь, зная расположение координатных линий и поверхностей, не трудно представить направления единичных базисных векторов. Для построения векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в точке P построим векторы, касательные к координатным линиям: $\rho, \varphi,$ и z в этой точке и обозначим их как $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ (рис.4). Из геометрических соображений понятно, что построенные векторы образуют ортогональный базис (докажите). Перейдем к вычислению коэффициентов Ламэ

$$H_1 = H_\rho, \qquad H_2 = H_\varphi, \qquad H_3 = H_z$$

и выражений для единичных векторов $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$.

Подставим в (1.15) выражения (2.2) и вычислим частную производную по $q^1 = \rho$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} \to \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos\varphi\, \vec{\imath} + \sin\varphi\, \vec{\jmath} + 0\,\vec{k}. \qquad 2.3$$

,Для вычисления коэффициента H_ρ, следуя определению (1.14), находим длину вектора $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}$ (2.3):

$$H_\rho = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right| = \sqrt{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2} = 1 \qquad 2.4$$

По такой же схеме, используя (1.15, 2.2), вычислим частные производные по $q^2 = \varphi$ и $q^3 = z$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} \to \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\,\vec{\imath} + \rho\cos\varphi\,\vec{\jmath} + 0\,\vec{k} \qquad 2.5$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3} \to \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 0\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + 1\,\vec{k} \qquad 2.6$$

Принимая во внимание выражения (2.5,2.6), вычислим длины векторов $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$. В результате для коэффициентов H_φ, H_z будем иметь:

$$H_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = \sqrt{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2} = |\rho| = \rho, \qquad 2.7$$

$$H_z = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| = 1 \qquad 2.8$$

В (2.7) учтено, что согласно (2.1) $\rho \geq 0$.
Коэффициенты H_ρ, H_φ, H_z будут неоднократно использоваться, поэтому имеет смысл собрать их в одном месте:

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1 \qquad 2.9$$

Выражения для базисных векторов $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ определяются общими соотношениями (1.10). Подставляя в них значения коэффициентов Ламэ (2.9) цилиндрической системы координат и частных производных (2.3, 2.5, 2.6), найдем представления для интересующих нас векторов:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath} \qquad 2.10$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \qquad 2.11$$

$$\vec{e}_z = \vec{k} \qquad 2.12$$

Ранее уже отмечалось, что цилиндрические координаты относятся к криволинейным ортогональным координатам. Для доказательства составим по парные скалярные произведения векторов (2.10, 2.11, 2.12), которые, как легко видеть, равны нулю:

$$(\vec{e}_\rho\vec{e}_\varphi) = 0, \quad (\vec{e}_\rho\vec{e}_z) = 0, \quad (\vec{e}_\varphi\vec{e}_z) = 0 \qquad 2.13$$

что и доказывает ортогональность цилиндрических координат.

2.2.Сферические координаты.

В сферических координатах положение точки задается тремя координатами

$$\begin{aligned} q^1 &= r, \qquad r \geq 0, \\ q^2 &= \theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \\ q^3 &= \varphi \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{aligned} \qquad 2.14$$

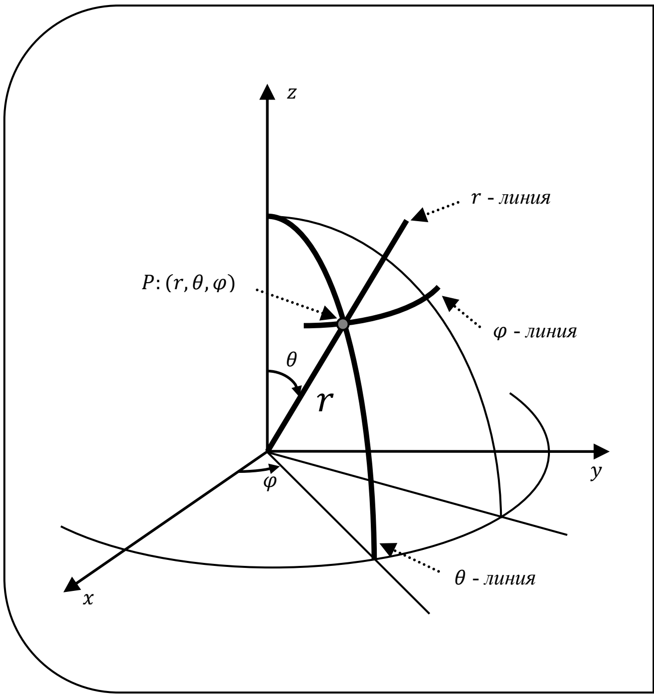
имеющими следующий геометрический смысл (рис.5): r-расстояние от точки P до начала координат, θ -угол между положительным направлением оси z и радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала координат в точку P, $\varphi -$ угол между положительным направлением оси x и проекцией на плоскость xoy радиус-вектора $\vec{r}$.

При исследовании сферических координат снова будем следовать ходу рассуждений выше изложенной общей теории: на первом шаге установим вид зависимостей координат x, y, z от криволинейных координат r, θ, φ, далее рассмотрим расположение координатных линий и поверхностей, что позволит представить пространственное расположение базисных векторов, и, как заключительный этап, вычислим коэффициенты Ламэ а также установим выражения для единичных базисных векторов $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ сферических координат. На основе полученных выражений для единичных базисных векторов докажем свойство ортогональности сферических координат.

Формулы (1.3) общей теории имеют вид:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \;\; y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \;\; z = r\cos\theta, \qquad 2.15$$

что легко установить из геометрических соображений следуя рис.5. На этом же рисунке показаны три координатные линии: r, θ и φ- линии, проходящие через заданную точку P, координаты которой равны r, θ, φ. Рекомендуем убедиться, что вдоль каждой из них изменяется по одной криволинейной координате.



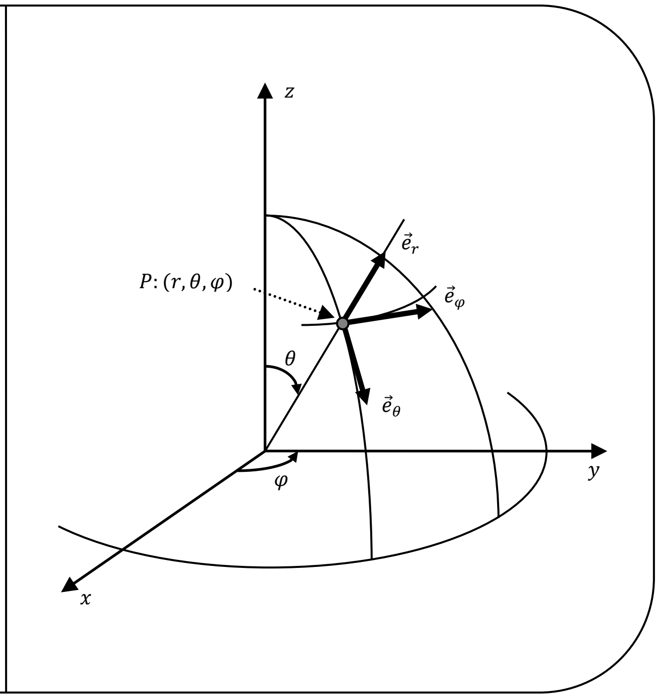


Рис. 5 **Рис.6**

Пусть точка P определена значениями координатами r, θ, φ. Координатная поверхность $q^1 = r = Const$ есть геометрическое место точек, равноудаленных от начала координат и является поверхностью сферы радиуса r_0, что и обусловливает название этих координат. Координатная поверхность $q^2 = \theta = Const -$ это конус, образующая которого составляет угол θ с осью z и проходящий через точку P. Координатная поверхность $q^3 = \varphi = Const -$ полуплоскость, проходящая через точку P, ось z, и составляющая угол φ с осью x. Теперь, зная расположение координатных линий и поверхностей, не трудно представить направления единичных базисных векторов. Для построения векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в точке P проводем векторы, касательные к координатным линиям $r, \theta,$ и φ в этой точке и обозначим их как $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ (рис.6). Из геометрических соображений понятно, что построенные векторы образуют ортогональный базис (докажите).
Перейдем к вычислению коэффициентов Ламэ

$$H_1 = H_r, \qquad H_2 = H_\theta, \qquad H_3 = H_\varphi$$

и выражений для единичных векторов $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$.
Подставим в (1.15) выражения (2.15) и вычислим частную производную по $q^1 = r$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} \to \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\overrightarrow{k} \qquad 2.16$$

‚Для вычисления коэффициента H_r, согласно определению (1.14), находим длину вектора $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$ (2.16):

$$H_r = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\cos\theta)^2} = 1 \qquad 2.17$$

По такой же схеме, используя (1.15,2.15), вычислим частные производные по $q^2 = \theta$ и $q^3 = \varphi$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} \to \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + r\cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - r\sin\theta\,\vec{k} \qquad 2.18$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3} \to \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\;\vec{\imath} + r\sin\theta\cos\varphi\;\vec{\jmath} + 0\,\vec{k} \qquad 2.19$$

Теперь остается вычислить длины векторов $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$. В результате для коэффициентов H_θ, H_φ будем иметь:

$$H_\theta = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right| = \sqrt{(r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta)^2} = |r| = r, \qquad 2.20$$

$$H_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = \sqrt{(r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\sin\theta\cos\varphi)^2} = |r\sin\theta| = r\sin\theta \qquad 2.21$$

В (2.20, 2.21) учтено, что согласно (2.14) $r \geq 0$ и $\sin\theta \geq 0$.
Соберем коэффициенты H_r, H_θ, H_φ в одном месте:

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta. \qquad 2.22$$

Выражения для базисных векторов $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ определяются общими соотношениями (1.10). Подставляя в эти соотношения значения коэффициентов (2.23) и частных производных (2.16, 2.18, 2,19), найдем представления для интересующих нас векторов:

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \qquad 2.23$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \qquad 2.24$$

$$\vec{e}_\varphi == -\sin\varphi\;\vec{\imath} + \cos\varphi\;\vec{\jmath} \qquad 2.25$$

Легко проверить, что по парные скалярные произведения векторов $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ равны нулю. Следовательно, указанные векторы взаимно ортогональны. Это свойство базисных векторов сферических координат рекомендуем установить самостоятельно на основе геометрического подхода.

§3.Приложения ортогональных криволинейных координат к механике частиц.

Прикладное значение теории криволинейных координат определяется в значительной мере тем, что эта теория позволяет разработать единую методологию решения широкого спектра прикладных задач и, в частности, задач кинематики и динамики. В рамках этого параграфа на примерах конкретных задач механики мы постараемся подтвердить сделанное утверждение, подчеркивая единый алгоритм их решения. Конечно, потребуются определенные усилия на начальном этапе применения криволинейных координат. Однако конечный результат освоения материала послужит вам компенсацией за затраченные усилия – вы овладеете системным подходом к анализу задач.

3.1. Кинематика: вектор скорости и его составляющие в ортогональной криволинейной системе координат.

Скорость и ускорение частицы относятся в механике к основным *кинематическим понятиям*. Для начала рассмотрим понятие вектора скорости и ответим на ниже перечисленные вопросы.

1. Найти составляющие вектора скорости $\vec{v}$ материальной точки в базисе единичных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ криволинейной системы координат по заданной траектории движения $\{ q^1 = q^1(t),\ q^2 = q^2(t),\ q^3 = q^3(t)\}$ - иными словами требуется найти физические составляющие. Мы употребили термин физические составляющие в соответствии с определением (1.36).

2. Найти физические составляющие вектора скорости $\vec{v}$ материальной точки, выражение для абсолютного значения скорости и кинетической энергии в цилиндрической системе координат.
3. Найти физические составляющие вектора скорости $\vec{v}$ материальной точки, выражение для абсолютного значения скорости и кинетической энергии в сферических координатах.

Рассмотрим решение первой части задачи. После того, как оно будет найдено, решение второй и третьей частей не потребует ни какой логической нагрузки – все решение сведется к формальным подстановкам.
Положение материальной точки в любой момент времени t можно задать координатами $\{x(t), y(t), z(t))\}$ прямоугольной декартовой системы координат или радиус-вектором

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}, \qquad 3.1$$

конец которого с течением времени описывает кривую линию – траекторию движения.
По аналогии, в криволинейной системе координат положение точки в момент времени t определяется значениями криволинейных координат $\{q^1(t), q^2(t), q^3(t)\}$. Согласно определению криволинейных координат, значения $\{x(t), y(t), z(t))\}$ однозначно связаны с координатами $\{q^1(t), q^2(t), q^3(t)\}$ т.е.

$$x(t) = x[q^1(t), q^2(t), q^3(t)],\ y(t) = y[q^1(t), q^2(t), q^3(t)],\ z(t) = [q^1(t), q^2(t), q^3(t)] \quad 3.2$$

в соответствии с формулами (1.3).

Из равенств (3.1) и (3.2) следует, что радиус вектор

$$\vec{r}(t) = x[q^1(t), q^2(t), q^3(t)]\vec{\imath} + y[q^1(t), q^2(t), q^3(t)]\vec{\jmath} + z[q^1(t), q^2(t), q^3(t)]\vec{k} =$$

$$= \vec{r}([q^1(t), q^2(t), q^3(t)]). \qquad 3.3$$

и, с математической точки зрения, есть сложная функция переменной времени t.

По определению, вектор скорости движения точки равен:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\ , \qquad 3.4$$

где $\vec{r}(t)$ определено выражением (3.3). Для вычисления скорости остается воспользоваться правилом вычисления производной сложной функции, следуя которому получим:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\,\vec{r}([q^1(t), q^2(t), q^3(t)])}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3}\dot{q}^3 \qquad 3.5$$

где для производных криволинейных координат по времени введены обозначения $\dot{q}^i$, $(i = 1,2,3.)$.

Выражение для вектора скорости (3.5) означает разложение вектора $\vec{v}$ по векторам $\left\{\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3}\right\}$, касательным к координатным линиям $\{q^1, q^2, q^3\}$ соответственно. Коэффициенты $\{\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3\}$ в разложении (3.5) есть ни что иное, как контравариантные составляющие вектора скорости V^1, V^2, V^3(по этой причине мы расположили индексы сверху). Для того чтобы сделать этот вывод, достаточно сравнить выражение (3.5) с определением контравариантных составляющих (1.41). Итак, имеют место равенства:

$$V^i = \dot{q}^i \quad (i = 1,2,3,) \qquad 3.6$$

Базисные векторы $\left\{\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3}\right\}$ не являются, вообще говоря, единичными, как этого требует постановка задачи. По условию задачи нам следует получить разложение вектора скорости по единичным базисным векторам $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ следующего вида:

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 \qquad 3.7$$

где $\{v_1, v_2, v_3\}$ физические составляющие вектора скорости.

Переход к единичным базисным векторам $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ легко осуществить, если принять во внимание определения этих векторов (1.12), которое, для удобства преобразований, здесь приведем:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2}, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3}. \qquad 3.8$$

Из(3.8) следует, что:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} = H_1\, \vec{e}_1,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} = \ H_2 \vec{e}_2,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3} = \ H_3 \vec{e}_3. \qquad 3.9$$

Осталось подставить найденные значения (3.9) для векторов $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}(i = 1,2,3)$ в (3.5). В результате, для интересующего нас разложения вектора скорости по единичным базисным векторам криволинейной системы координат, получим:

$$\vec{v} = \ \dot{q}^1 H_1 \vec{e}_1 + \dot{q}^2 H_2 \vec{e}_2 + \dot{q}^3 H_3 \vec{e}_3 \qquad 3.10$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (3.7), найдем значения физических составляющих вектора скорости:

$$v_1 = \ \dot{q}^1\, H_1,\ v_2 = \ \dot{q}^2 H_2,\ v_3 = \ \dot{q}^3 H_3 \qquad 3.11$$

Ниже мы воспользуемся полученными формулами при решении 2-ой и 3-ей частей поставленной задачи. Прикладное значение выражений (3.11) состоит в том, что для вычисления составляющих скорости, абсолютного значения скорости, кинетической энергии в конкретной системе координат, достаточно знания коэффициентов Ламэ $\{H_1, H_2, H_3\}$ в этой системе координат, что далее и будет продемонстрировано.

Решение второй части задачи. Для определения физических составляющих вектора скорости $\vec{v}$ в цилиндрической системе координат следует всего лишь заменить переменные $\{q^1, q^2, q^3\}$ в (3.11) на координаты цилиндрической системы координат $\{\rho, \varphi, z\}$, и подставить известные значения коэффициентов Ламэ:

$$H_1 = \ H_\rho = 1,\ \ H_2 = \ H_\varphi = \rho,\ \ \ H_3 = \ H_z = 1 \qquad 3.12$$

Следуя выше сказанному, из (3.11) и (3.12) для физических составляющих скорости $\{v_1 = v_\rho, v_2 = v_\varphi, v_3 = v_z\}$ получим:

$$v_\rho = \ \ \dot{\rho},\ \ v_\varphi = \rho\dot{\varphi},\ \ \ v_z = \ \dot{z} \qquad 3.13$$

Остановимся на простом, но важном моменте, относящемся к только что полученным выражениям. Из (3.13) легко усмотреть, что все три составляющие имеют одну и ту же размерность (проверьте!). Равенство размерностей в общем виде обеспечивается коэффициентами $\{H_1, H_2, H_3\}$ в выражении (3.10).

Здесь заметим, что если бы стояла задачи найти контравариантные составляющие скорости, то ответ на поставленный вопрос легко находится на основании выражений (3.6), в которых следует осуществить замены $q^1 = \rho,\ q^2 = \ \varphi,\ q^3 = \ z$. В результате будем иметь:

$$V^\rho = \dot{\rho}, \qquad V^\varphi = \dot{\varphi}, \qquad V^z = \dot{z} \qquad 3.14$$

Естественно, физические составляющие (3.13) можно вычислить по контравариантным составляющим (3.14), следуя формулам общей теории (1.47).

Используя для единичных базисных векторов цилиндрической системы координат обозначения $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ и выражения для физических составляющих (3.13), запишем вектор скорости в этом базисе:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \qquad 3.15$$

Так как базисные векторы $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ взаимно ортогональны, то квадрат длины вектора, а следовательно, и квадрат абсолютного значения скорости, равен сумме квадратов его составляющих. Итак, абсолютное значение скорости $v = |\vec{v}|$ равно:

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^{\,2} + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^{\,2}} \qquad 3.16$$

Наконец, совсем просто решается вопрос о виде выражения для кинетической энергии К. По определению

$$T = \frac{mv^2}{2}, \qquad 3.17$$

здесь m масса тела. Осталось подставить (3.16) в это выражение и получить ответ на поставленный вопрос:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^{\,2} + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^{\,2}) \qquad 3.18$$

Решение третьей части задачи. Техника решения этой задачи не содержит ничего нового в сравнении с предыдущим решением, в чем собственно и проявляется прикладное значение общей теории криволинейных координат. Итак, как и ранее, заменим переменные $\{q^1, q^2, q^3\}$ в выражении (3.11) на координаты сферической системы координат $\{r, \theta, \varphi\}$ и подставим соответствующие значения коэффициентов Ламэ:

$$H_1 = H_r = 1,\ \ H_2 = H_\theta = r,\ \ \ H_3 = H_\varphi = r\sin\theta \qquad 3.19$$

Для физических составляющих вектора скорости $\{v_1 = v_r, v_2 = v_\theta, v_3 = v_\varphi\}$ получим:

$$v_r = \dot{r},\ \ v_\theta = r\dot{\theta},\ \ v_\varphi = r\sin\theta\,\dot{\varphi} \qquad 3.20$$

Как второй вариант решения рекомендуем вначале найти контравариантные составляющие вектора скорости по формулам (3.6), а затем воспользоваться выражениями (1.47) для определения физических составляющих вектора скорости.
В дальнейшем нам понадобится представление вектора скорости в базисе единичных векторов сферической системы координат $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$, которое, если воспользоваться (3.20), имеет вид:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad 3.21$$

Векторы $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$ образуют ортогональный базис сферической системы координат. На основании (3.21) приходим к выводу, что абсолютное значение скорости равно:

$$v = \sqrt{\dot r^{\,2} + \left(r\dot\theta\right)^2 + (r\sin\theta\,\dot\varphi)^{\,2}}, \qquad 3.22$$

и, как следующий шаг, вычислим кинетическую энергию в переменных сферической системы координат:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot r^{\,2} + \left(r\dot\theta\right)^2 + (r\sin\theta\,\dot\varphi)^{\,2}\right) \qquad 3.23$$

В пункте 3.4 мы воспользуемся выражениями (3.18) и (3.23) для вывода уравнений движения частицы в цилиндрических и сферических координатах методом Лагранжа.

3.2.Динамика:уравнения движения частицы в ортогональной криволинейной системе координат (второй закон Ньютона).

Как показывает опыт решения прикладных задач, успех решения в значительной мере зависит от выбора системы координат, в которой проводятся вычисления. При удачном выборе криволинейной системы координат математические выражения или уравнения, описывающие процесс, принимают более удобный для анализа проблемы вид.

В силу сказанного, принципиальный интерес для решения задач динамики движения тела представляет вопрос о виде уравнений движения в криволинейных координатах. В такой общей постановке мы наметим лишь ход рассуждений. Что касается вывода уравнений движения в цилиндрической и сферической системах координат, наиболее часто используемых в теории и приложениях, то он будет проведен со всеми деталями.

Вывести уравнения движения частицы в криволинейной системе координат означает, что нам предстоит записать второй закон Ньютона (массу тела полагаем постоянной):

$$m\vec a = \sum_i \vec F^{i} = \vec F, \qquad 3.24$$

в проекциях на базисные векторы $\{\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$. Здесь m масса тела и $\vec F$ равнодействующая сил $\vec F^{i}$, приложенных к телу. Ускорение $\vec a = \frac{d\vec v}{dt}$ и, подставляя в это выражение значение скорости (3.10), запишем:

$$\vec a = \frac{d}{dt}\left(\dot q^1 H_1 \vec e_1 + \dot q^2 H_2 \vec e_2 + \dot q^3 H_3 \vec e_3\right) \qquad 3.25$$

Следует иметь ввиду, что все сомножители слагаемых в круглой скобке в общем случае зависят от времени. Это следует из того, что коэффициенты $\{H_1, H_2, H_3\}$ и базисные векторы $\{\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$ есть функции координат $\{q^1(t), q^2(t), q^3(t)\}$ движущегося тела.

Принимая во внимание вышесказанное, представим правую часть (3.25) в виде, удобном для дальнейшего обсуждения:

$$\vec a = \frac{d(\dot q^1 H_1)}{dt}\vec e_1 + \frac{d(\dot q^2 H_2)}{dt}\vec e_2 + \frac{d(\dot q^3 H_3)}{dt}\vec e_3 + \dot q^1 H_1 \frac{d\vec e_1}{dt} + \dot q^2 H_2 \frac{d\vec e_2}{dt} + \dot q^3 H_3 \frac{d\vec e_3}{dt} \qquad 3.26$$

Как видно из выражения (3.26), на этом этапе вычислений нам не удалось в явном виде найти составляющие вектора ускорения по базисным векторам $\{\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$ из-за присутствия в нем последних трех слагаемых, в которые входят производные базисных векторов по времени. Рассмотрим указанные производные подробнее:

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \frac{d\vec{e}_1\{q^1(t),q^2(t),q^3(t)\}}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial q^3}\dot{q}^3 \qquad 3.27$$

$$\frac{d\vec{e}_2}{dt} = \frac{d\vec{e}_2\{q^1(t),q^2(t),q^3(t)\}}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_2}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial\vec{e}_2}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial\vec{e}_2}{\partial q^3}\dot{q}^3 \qquad 3.28$$

$$\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \frac{d\vec{e}_3\{q^1(t),q^2(t),q^3(t)\}}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_3}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial\vec{e}_3}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial\vec{e}_3}{\partial q^3}\dot{q}^3 \qquad 3.29$$

Оказывается, что присутствующие в (3.27÷ 3.29) производные $\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial q^j}$ $(i,j = 1,2,3)$, удается вычислить в общем виде через базисные векторы $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. В справочных целях приведем здесь конечные результаты, оставляя в стороне детали вычислений (в дальнейшем мы докажем эти формулы):

$$\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial q^1} = -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q^2}\vec{e}_2 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q^3}\vec{e}_3, \quad \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial q^2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q^1}\vec{e}_2, \quad \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial q^3} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q^1}\vec{e}_3, \qquad 3.30$$

$$\frac{\partial\vec{e}_2}{\partial q^1} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q^2}\vec{e}_1, \quad \frac{\partial\vec{e}_2}{\partial q^2} = -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q^3}\vec{e}_3 - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q^1}\vec{e}_1, \quad \frac{\partial\vec{e}_2}{\partial q^3} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q^2}\vec{e}_3, \qquad 3.31$$

$$\frac{\partial\vec{e}_3}{\partial q^1} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q^3}\vec{e}_1, \quad \frac{\partial\vec{e}_3}{\partial q^2} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q^3}\vec{e}_2, \quad \frac{\partial\vec{e}_3}{\partial q^3} = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q^1}\vec{e}_1 - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q^2}\vec{e}_2 \qquad 3.32$$

Совместное использование представленных здесь формул (3.26÷ 3.32) решает вопрос об определении выражения вектора ускорения и виде уравнений движения тела в произвольных криволинейных координатах. Мы не станем выписывать окончательные выражения в силу их громоздкости; к тому же, при решении конкретных задач последовательное применение обсуждаемых выражений в направлении от (3.30÷ 3.32) к (3.26) не вызывает затруднений, что будет ниже продемонстрировано на примерах вычислений в цилиндрических и сферических координатах.

3.3 Уравнения движения в цилиндрической системе координат

Перейдем к выводу уравнений движения тела в цилиндрической системе координат. Для начала запишем выражение для ускорения, заменив в (3.26) величины $\{q^1,q^2,q^3\}$, $\{H_1,H_2,H_3\}$, $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ на соответствующие им величины $\{\rho,\varphi,z\}$, $\{H_\rho,H_\varphi,H_я\}$, $\{\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z\}$ цилиндрической системы координат. Принимая во внимание значения коэффициентов Ламэ (2.9), получим

$$\vec{a} = \frac{d(\dot{\rho})}{dt}\vec{e}_\rho + \frac{d(\rho\dot{\varphi})}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{d(\dot{z})}{dt}\vec{e}_z + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt} =$$

$$= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + (\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt} \qquad 3.33$$

Присутствующие в этом выражении производные базисных векторов по времени можно вычислить на основе совместного использования формул (3.27÷ 3.29) и (3.30÷ 3.32), (рекомендуем провести соответствующие вычисления). Однако мы поступим иначе и выполним программу вывода уравнений не обращаясь к общим соотношениям (3.27÷ 3.29) и (3.30÷ 3.32).
Для вычисления производных от базисных векторов в правой части равенства (3.33), воспользуемся следующими рассуждениями. Производная $\frac{d\vec{e}_z}{dt}$ равна нулю, так как вектор

$\vec{e}_z$ не изменяется при переходе от одной точки к другой. Для определения двух оставшихся производных напомним, что согласно (2.10, 2.11)

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath} \tag{3.34}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \tag{3.35}$$

Зависимость базисных векторов от времени, как уже отмечалось, обусловлена тем, что с течением времени изменяются координаты положения тела. В нашем случае это угол φ, который в общем случае движения тела изменяется. Из (3.34) имеем

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}) = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \tag{3.36}$$

здесь мы воспользовались формулой (3.35). Легко найти, что

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}) = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho, \tag{3.37}$$

если продифференцировать (3.35) и затем учесть (3.34). Соберем вместе полученные результаты для производных базисных векторов $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,\ \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho,\quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0 \tag{3.38}$$

и подставим их значения в выражение (3.33) для вектора ускорения, объединив коэффициенты при равных базисных векторах:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z \tag{3.39}$$

Обозначим составляющие ускорения вдоль направлений базисных векторов $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ как $\{a_\rho, a_\varphi, a_z\}$ и запишем:

$$\vec{a} = a_\rho\vec{e}_\rho + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z \tag{3.40}$$

Сравнивая выражения (3.39, 3.40) для компонент ускорения, получим:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,\ a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi},\quad a_z = \ddot{z} \tag{3.41}$$

Для получения конечного результата достаточно приравнять проекции левой и правой частей уравнения (3.24) и подставить значения проекций ускорения (3.41):

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = \sum_i F_\rho^i = F_\rho \tag{3.42}$$

$$m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = \sum_i F_\varphi^i = F_\varphi \tag{3.43}$$

$$m\ddot{z} = \sum_i F_z^i = F_z \tag{3.44}$$

где $F_\rho^i, F_\varphi^i, F_z^i -$ проекции -ой силы на направления векторов $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ соответственно. Суммы в правых частях этих уравнений можно интерпретировать как составляющие равнодействующей сил, приложенных к телу.
Система полученных уравнений и есть уравнения движения материальной точки в цилиндрической системе координат.

3.4 Примеры задач в цилиндрической системе координат

Сделаем следующие замечания относительно использования системы уравнений (3.42÷ 3.44) в разных постановках физических задач.

Если заданы силы, то в общем случае задача сводится к отысканию трех функций $\rho(t), \varphi(t), z(t)$, стоящих под знаками производных нулевого (сами функции), первого и второго порядков. Уравнения, содержащие производные, как мы узнаем из дальнейшего прохождения курса математики, называются дифференциальными уравнениями. При изучении методов решения дифференциальных уравнений мы вернемся к системе (3.42÷ 3.44) для некоторых относительно простых задач. Термин "относительно простые задачи" употреблен неслучайно. Дело в том, что рассматриваемая система уравнений к тому же нелинейная, то есть некоторые искомые функции входят в степени, отличной от единицы (на пример $\dot{\varphi}^2$) или в произведении ($\rho\ddot{\varphi}, \dot{\rho}\dot{\varphi}$), Наконец, сложность анализа задачи в значительной мере определяется характером зависимости сил от времени и координат. Под простыми задачами мы понимаем такие, в которых нелинейность задачи легко преодолевается или не проявляется в силу особых условий постановки задачи. Некоторые из таких примеров рассмотрены в этом пункте.

Если задана траектория движения в параметрическом виде или некоторая информация о траектории, то в таких задачах обычно требуется найти скорость, ускорение и, при некоторых дополнительных условиях, величины каких либо сил, действующих на тело. Обратимся к примерам:

Пример №1.*Тело движется вдоль ρ – линии, проходящей в начальный момент времени $t = 0$ через точку с координатами $(\rho_0 , \varphi_0 , z_0)$ под действием силы*

$$\vec{F} = F(\rho)\vec{e}_\rho \qquad 3.45$$

Из общих уравнений (3.42÷ 3.44) *вывести уравнения движения; для случая $F(\rho) = F_0 = Const.$ решить полученную систему уравнений.*

Для начала проанализируем условие задачи. По данным задачи тело движется вдоль ρ – линии. В цилиндрической системе координат ρ – линия есть прямая, проходящая через заданную точку параллельно плоскости (XOY) и пересекающая ось Z. Следовательно, вдоль кривой движения с течением времени изменяется координата ρ, в то время как координаты (φ, z) остаются неизменными, т.есть:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi_0, \quad z = z_0 \qquad 3.46$$

Для составляющих сил из (3.45) имеем:

$$F_\rho = F(\rho), \quad F_\varphi = 0, \quad F_z = 0 \qquad 3.47$$

Для вывода уравнений подставим (3.46÷ 3.47) в систему (3.42÷ 3.44) и не забудем, что в нашем случае $\dot{\varphi}$ и $\dot{z}$ равны нулю. Очевидно, что два последних уравнения выполняются тождественно; в итоге система уравнений относительно $\rho(t), \varphi, z$ будет иметь вид:

$$m\ddot{\rho} = F(\rho) \qquad 3.48$$

$$\varphi = \varphi_0 \qquad 3.49$$

$$z = z_0 \qquad 3.50$$

Возможность получить окончательное аналитическое решение уравнения (3.48) зависит от вида функции $F(\rho)$. В нашем случае $F(\rho) = F_0 = Const.$ и решение легко находится повторным интегрированием обеих частей (3.48):

$$\rho(t) = \frac{F_0}{2m}t^2 + v_0 t + \rho_0 \qquad 3.51$$

в котором мы узнаем хорошо известный результат, относящийся к описанию равноускоренного движения тела под действием постоянной силы. Постоянные интегрирования ρ_0 и v_0 имеют смысл начального значения координаты ρ и начальной скорости. Этот простейший пример рассмотрен лишь с целью адаптации к использованию уравнений (3.42÷ 3.44).

Пример № 2.*Точечное тело массы m движется по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью ω. Найти вектор ускорения, абсолютное значение ускорения, направление и величину равнодействующей сил, приложенных к телу.*

Решение.

Обратим внимание, что в этой задаче задана траектория – окружность. Будем считать, что окружность лежит в плоскости $z = Const.$, в этом случае $\rho = \mathrm{R}$, и угловая скорость $\dot{\varphi} = \omega$.

Все решение этой простейшей задачи сводится к подстановке значений

$$\rho = \mathrm{R}, \ \ \dot{\varphi} = \omega = Const., \ \ z = Const., \qquad 3.52$$

в ранее установленные выражения (3.41) для компонент вектора ускорения, а именно

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \quad \text{при } \rho = \mathrm{R} \text{ и } \dot{\varphi} = \omega = Const. \ \rightarrow \ a_\rho = -\omega^2\mathrm{R} \qquad 3.53$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad \text{при } \rho = \mathrm{R} \text{ и } \dot{\varphi} = \omega = Const. \ \rightarrow \ a_\varphi = 0 \qquad 3.54$$

$$a_z = \ddot{z} \quad \text{при } z = Const. \ \rightarrow \ a_z = 0 \qquad 3.55$$

Итак, составляющие ускорения найдены на уровне формальной подстановки. Вектор ускорения вычисляется по формуле (3.40), в которую следует подставить только что найденные значения $\{a_\rho, a_\varphi, a_z\}$ и, очевидно, равен

$$\vec{a} = -\omega^2\mathrm{R}\vec{e}_\rho + (0)\vec{e}_\varphi + (0)\vec{e}_z \qquad 3.56$$

Выводы из этого выражения:

1.абсолютное значение ускорения равно $\omega^2\mathrm{R}$

2.вектор ускорения направлен в сторону, противоположную вектору $\vec{e}_\rho$, то есть по радиусу к центру окружности.

Надлежащие определению составляющие равнодействующей силы, как уже отмечалось, равны правым частям уравнений (3.42÷ 3.44). Записывая их справа налево, в результате подстановок выражений (3.53÷3.55), найдем составляющие

$$F_\rho = \sum_i F_\rho^i = -m\mathrm{R}\omega^2,\;\; F_\varphi = \;\sum_i F_\varphi^i \;=\; 0,\quad F_z \;=\; \sum_i F_z^i \;= 0, \qquad 3.57$$

и, наконец, равнодействующую сил $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{F} = \; F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z == -m\omega^2 \mathrm{R}\vec{e}_\rho + (0)\vec{e}_\varphi + (0)\vec{e}_z \qquad 3.58$$

Выводы из этого выражения:
1.абсолютное значение равнодействующей сил $\vec{F}$ равно $m\omega^2\mathrm{R}$
2. сила $\vec{F}$ направлена в сторону, противоположную вектору $\vec{e}_\rho$, то есть по радиусу к центру окружности

Тем самым мы воспроизвели хорошо известные в рамках школьного курса механики результаты анализа вращательного движения по окружности с постоянной угловой скоростью как частный случай общего подхода.

Пример №3.*В выше разобранном примере мы вели рассмотрение при условиях*

$$\rho = \; R,\;\; \dot{\varphi} = \; \omega = Const.,\;\; z = Const. \qquad 3.59$$

Давайте теперь усложним задачу в следующем отношении – откажемся от постоянства угловой скорости и будем считать ω функцией времени. Условия задачи запишем в виде

$$\rho = \; \mathrm{R},\;\; \boldsymbol{\dot{\varphi}} = \; \boldsymbol{\omega} \;=\; \boldsymbol{\omega(t)},\;\; z = Const. \qquad 3.60$$

Жирным шрифтом отмечены внесенные изменения в постановке задачи. Займемся определением компонент вектора ускорения и его абсолютного значения. Постараемся в этом случае ответить на вопросы, сформулированные в примере №2, и проследим, что изменится в наших выводах по сравнению с выводами в предыдущем примере.

Как и ранее, подставим данные условий (3.60) в выражения (3.41) для компонент вектора ускорения. Результаты подстановки представим для последующего сравнения с примером №2 в той же форме (3.53÷3.55):

$$a_\rho = \; \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \qquad \text{при } \rho = \; \mathrm{R} \text{ и } \boldsymbol{\dot{\varphi}} = \; \boldsymbol{\omega} \;=\; \boldsymbol{\omega(t)}. \;\; \rightarrow \;\; a_\rho = \; -\omega^2\,\mathrm{R} \qquad 3.61.$$

$$a_\varphi = \;\; \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi},\;\; \text{при } \rho = \; \mathrm{R} \text{ и } \dot{\varphi} = \omega(t). \qquad \rightarrow \;\; a_\varphi = \; \dot{\omega}\,\mathrm{R} \qquad 3.62.$$

$$a_z \;=\; \ddot{z} \qquad \text{при } z = Const. \qquad \rightarrow \quad a_z \;=\; 0 \qquad 3.63$$

В сравнении с примером №2 обнаруживается новый момент – кроме составляющей $a_\rho = \; -\omega^2\mathrm{R}$, совпадающей по форме с (3.53), именуемой центростремительным или нормальным ускорением, возникает составляющая a_φ вдоль вектора $\vec{e}_\varphi$, касательного к окружности. Величина $a_\varphi = \rho\,\dot{\omega}$ называется тангенциальной составляющей ускорения. Она, как это видно из (3.62), пропорциональна производной угловой скорости, иными словами угловому ускорению.

Вектор ускорения вычисляется по формуле (3.40), в которую следует подставить значения $\{a_\rho, a_\varphi, a_z\}$ из (3.61÷3.63). В результате получим:

$$\vec{a} = -\omega^2 \mathrm{R}\, \vec{e}_\rho + \dot{\omega}\mathrm{R}\vec{e}_\varphi + (0)\vec{e}_z \qquad 3.64.$$

и здесь же приведем выражение для длины вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\omega^2 \mathrm{R})^2 + (\mathrm{R}\dot{\omega})^2} \qquad 3.65$$

Пример №4.*Узкая длинная трубка, перпендикулярная оси Z, вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью* $\dot{\varphi} = \omega = Const.$ *по часовой стрелке. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней без трения.*
1.найти вид уравнений движения шарика
2.найти зависимость координаты положения шарика ρ *от времени и равнодействующую силу, действующую на него в функции времени, если в начальный момент шарик находился на оси вращения и имел начальную скорость* $v_0 > 0$.

Обсудим, в каком отношении поставленная задача усложнена в сравнении с примером №2.
Напомним, что в упомянутом примере переменные (ρ, φ) удовлетворяли условиям

$$\rho = R, \ \dot{\varphi} = \omega = Const., \ z = Const.$$

В предложенной задаче шарик движется вдоль трубки, следовательно, изменяется не только координата φ, но и расстояние $\rho = \rho(t)$ от оси Z до шарика. Следовательно, для координат положения шарика имеют место условия движения:

$$\rho = \rho(t), \ \dot{\varphi} = \omega = Const., \ z = Const. \qquad 3.66$$

из которых ясно, что $\ddot{\varphi} = 0$ и $\ddot{z} = 0$. Что касается равнодействующей сил

$$\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z, \qquad 3.67$$

действующих на шарик, (**см. рис.** 7) то составляющая $F_\rho = 0$ (шарик скользит без трения), $F_z = N - mg$, а F_φ, как будет видно, определится из системы уравнений. Решение задачи сводится к подстановке данных строки (3.66) и составляющих вектора $\vec{F}$ в систему уравнений (3.42÷ 3.44), что и приводит к искомому ответу на первый вопрос:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) = 0 \qquad 3.68$$

$$2m\dot{\rho}\dot{\varphi} = 2m\dot{\rho}\omega = F_\varphi \qquad 3.69$$

$$m\ddot{z} = 0 = N - mg = F_z \qquad 3.70$$

Перейдем ко второму вопросу. Из полученной системы уравнений видно, что первое уравнение не зависит от остальных и является однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами относительно функции $\rho = \rho(t)$. Однородным это уравнение называется по той причине, что правая часть уравнения (3.68) равна нулю. После деления (3.68) на m получим:

$$\ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0 \qquad 3.71$$

Как вы узнаете в дальнейшем, алгоритм решения однородных уравнений с постоянными коэффициентами сводится к простым действиям, которые мы покажем на примере только что выведенного уравнения. Частное решение ищется в виде $\rho(t) = e^{\gamma t}$, где γ константа, подлежащая определению. Подставим предполагаемый вид решения в дифференциальное уравнение (3.71) и учтем, что $\ddot{\rho}(t) = \gamma^2 e^{\gamma t}$. Сократив на множитель $e^{\gamma t}$, придем к квадратному уравнению относительно искомого параметра γ:

$$\gamma^2 - \omega^2 = 0. \qquad 3.72.$$

Корни этого уравнения $\gamma_1 = \omega$ и $\gamma_2 = -\omega$ действительные и различные. Подставляя вместо γ значения γ_1и γ_2 в $e^{\gamma t}$, получим два различных действительных частных решений:

$$e^{\omega t} \quad \text{и} \quad e^{-\omega t} \qquad 3.73$$

Общее решение, согласно теории дифференциальных уравнений, строится как линейная комбинация частных решений (3.73):

$$\rho(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \qquad 3.74$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 находятся из начальных условий (см. пункт 2 формулировки текущего примера). В нулевой момент времени шарик находился на оси Z, т.е. ρ равнялось нулю. Из этого условия и (3.74) следует одно из уравнений для определения неизвестных постоянных C_1 и C_2, а именно:

$$\rho(t = 0) = C_1 + C_2 = 0 \qquad 3.75$$

Согласно условию задачи скорость шарика в начальный момент равна v_0. С другой стороны, как это следует из выражения (3.13), единственной отличной от нуля составляющей скорости в начальный момент времени является $v_\rho = \dot{\rho}$, которая, как легко видеть из (3.74), равна:

$$\dot{\rho} = C_1\omega e^{\omega t} - C_2\omega e^{-\omega t} \qquad 3.76$$

Подставим в это выражение $t = 0$ и приравняем его v_0.В результате получим второе уравнение относительно констант C_1 и C_2:

$$\dot{\rho}(t = 0) = C_1\omega - C_2\omega = v_0 \qquad 3.77$$

Решение системы уравнений (3.75) и (3.77) имеет вид:

$$C_1 = \frac{v_0}{2\omega}, \quad C_2 = -\frac{v_0}{2\omega} \qquad 3.78$$

Совместное использование соотношений (3.74) и (3.78) приводит к искомой зависимости координаты ρ от времени:

$$\rho(t) = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t \qquad 3.79$$

Уравнения (3.69÷ 3.70) до сих пор оставались в стороне. Однако именно они дают возможность найти составляющие силы, действующей со стороны трубки на шарик. Подставим найденное решение (3.79) в левую часть уравнения (3.69). После простых вычислений получим величину силы, действующей в направлении базисного вектора $\vec{e}_\varphi$ (т.е. в плоскости XOY по нормали к трубке):

$$F_\varphi = 2m\omega v_0 \operatorname{sh} \omega t \qquad 3.80$$

а из уравнения (3.70) найдем ,что $N = mg$.

Пример №5. *Шарик движется без трения по спиральному желобу, ось которого расположена вертикально. Первоначально покоящийся шарик находился на высоте H, шаг и радиус спирали равны соответственно h и R. Найти уравнения движения шарика, зависимости линейной скорости и линейного ускорения от времени, составляющие силы, действующей со стороны желоба на шарик (т.е. в данном случае реакцию опоры).*

В этом примере при движении шарика изменяются координаты φ и z, а координата ρ остается неизменной, то есть:

$$\rho = R, \;\; \dot{\varphi} = \omega = \omega(t), \;\; z = z(t). \qquad 3.81$$

Предлагаемый пример усложнен по сравнению с ранее рассмотренными в том отношении, что:
1.две координаты φ и z являются функциями времени
2.три составляющих $\{N_\rho, N_\varphi, N_z\}$ вектора силы реакции опоры $\vec{N}$ являются неизвестными величинами. В принятых обозначениях для $\vec{N}$ имеем разложение по базисным векторам $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ следующего вида:

$$\vec{N} = N_\rho \vec{e}_\rho + N_\varphi \vec{e}_\varphi + N_z \vec{e}_z \qquad 3.82$$

Кроме реакции опоры на шарик действует сила тяжести $\vec{F}_\text{Т}$

$$\vec{F}_\text{Т} = mg\vec{e}_z \qquad 3.83$$

.Как и ранее, последовательность действий решения задачи сводится к подстановке данных строки (3.81) и проекций векторов сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_\text{Т}$ в систему уравнений (3.42÷ 3.44).В результате получим уравнения движения (конечно же $\dot{\rho}$ и $\ddot{\rho}$ равны нулю):

$$m(-R\dot{\varphi}^2) = N_\rho \qquad 3.84$$

$$mR\ddot{\varphi} = N_\varphi \qquad 3.85$$

$$m\ddot{z} = N_z - mg \; . \qquad 3.86$$

К сожалению, эта система уравнений не является замкнутой – в систему трех уравнений входит пять неизвестных функций: $\{\varphi, z, N_\rho, N_\varphi, N_z\}$. Выведем два недостающих уравнения. Во-первых, учтем так называемые кинематические связи. Действительно, в нашем случае имеет место линейная связь между координатами z и φ:

$$z = H - \frac{h}{2\pi}\varphi \qquad 3.87$$

в которой учтено, что за один оборот шарик опускается вниз на величину шага спирали h, а φ получает приращение 2π, а так же тот факт, что в начальный момент шарик находился на высоте H и координата $\varphi = 0$.

Во-вторых, реакция опоры $\vec{N}$ направлена по нормали к траектории движения, т.е. перпендикулярно к вектору скорости $\vec{v}$ (напомним, вектор скорости направлен по касательной к траектории движения). В таком случае скалярное произведение

$$\left(\vec{N} \cdot \vec{v}\right) = 0 \qquad 3.88$$

Что касается выражения для вектора скорости, то оно следует из общей формулы (1.12) как результат подстановок $\rho = R$ и $\dot{\rho} = 0$:

$$\vec{v} = 0\vec{e}_\rho + R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \qquad 3.89$$

Распишем скалярное произведение (3.88) через компоненты векторов $\vec{N}$ и $\vec{v}$, определенных выражениями (3.82) и (3.89):

$$\left(\vec{N} \cdot \vec{v}\right) = R\dot{\varphi}N_\varphi + \dot{z}N_z = 0 \qquad 3.90$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения, соберем вместе полученные уравнения (3.84÷3.87),(3.90), составляющие интересующую нас замкнутую систему уравнений движения тела (тем самым ответим на первый вопрос примера):

$$m(-R\dot{\varphi}^2) = N_\rho \qquad 3.91$$

$$mR\ddot{\varphi} = N_\varphi \qquad 3.92$$

$$m\ddot{z} = N_z - mg\ . \qquad 3.93$$

$$z = H - \frac{h}{2\pi}\varphi \qquad 3.94$$

$$R\dot{\varphi}N_\varphi + \dot{z}N_z = 0 \qquad 3.95$$

относительно неизвестных функций $\{\varphi, z, N_\rho, N_\varphi, N_z\}$.

Перейдем к вопросам о зависимости скорости и ускорения от времени. Как будет видно, решение этой системы уравнений не вызывает затруднений. Для начала, например, обратимся к уравнению (3.94) и подставим значение его правой части вместо z в уравнении (3.93):

$$-\frac{mh}{2\pi}\ddot{\varphi} = N_z - mg \qquad 3.96$$

Уравнение (3.95) разрешаем относительно N_z, что дает

$$N_z = -\frac{R\dot{\varphi}}{\dot{z}} N_\varphi \qquad 3.97$$

И принимая во внимание, что, согласно (3.94) $\dot{z} = -\frac{h}{2\pi}\dot{\varphi}$, преобразуем (3.97) к виду

$$N_z = \frac{2\pi R}{h} N_\varphi \qquad 3.98$$

Воспользуемся выражением (3.92) для N_φ, которое совместно с (3.98) приводит к соотношению

$$N_z = \frac{2\pi m R^2}{h}\ddot{\varphi} \qquad 3.99$$

Наконец, заменяя N_z в уравнении (3.96) его значением (3.99) и сокращая на m, придем к простому уравнению относительно угловой переменной φ:

$$\ddot{\varphi} = g\frac{2\pi}{h}\frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2} \qquad 3.100$$

Из этого выражения делаем вывод о том, что угловое ускорение $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ не зависит от времени. Интегрируя по времени (3.100), найдем зависимость угловой скорости $\omega = \dot{\varphi}$ от времени

$$\omega = \dot{\varphi} = g\frac{2\pi}{h}\frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}t + C \qquad 3.101$$

которая , как видно из приведенного выражения, является линейной. Постоянную интегрирования C определим из данных задачи, согласно которым шарик при $t = 0$ находился в покое и, следовательно, $\omega = 0$. Подставляя эти значения t и ω в (3.101), найдем, что $C = 0$. Итак, окончательно, зависимость угловой скорости вращения от времени имеет вид

$$\omega = \dot{\varphi} = g\frac{2\pi}{h}\frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}t \qquad 3.102$$

Чтобы найти зависимость координаты φ от времени, достаточно проинтегрировать по переменной t выражение (3.102), что, при нулевых начальных условиях, накладываемых на функцию φ, позволяет записать ответ в форме

$$\varphi = g\frac{\pi}{h}\frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}t^2 \qquad 3.103$$

Как следствие формул (3.94) и (3.103) устанавливается зависимость координаты z от времени:

$$z = H - \frac{g}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}t^2 \qquad 3.104$$

На основе полученных решений, используя соотношения (3.91),(3.92),(3.99), легко определить составляющие вектора реакции опоры. Действительно, для вычисления компоненты силы N_ρ подставим в (3.91) выражение (3.102), записав последовательность равенств

$$N_\rho = m(-R\dot{\varphi}^2) = -m\frac{g^2}{R}\frac{\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2\right]^2}t^2 \qquad 3.105$$

Знак минус в этом выражении означает, что составляющая N_ρ направлена по радиусу к оси вращения (центростремительная сила) и с течением времени возрастает пропорционально квадрату времени.

Составляющую N_φ находим из выражения (3.92) и (3.100), имея цепочку равенств

$$N_\varphi = mR\ddot{\varphi} = mg\frac{2\pi R}{h}\frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2} \qquad 3.106$$

из чего делаем вывод о независимости этой составляющей от времени, или, что то же самое, от координат положения тела.

Наконец, вычислим значение N_z. Как следствие подстановки (3.100) в (3.99) получим

$$N_z = \frac{2\pi m R^2}{h}\ddot{\varphi} = mg\frac{\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2\right]^2} \qquad 3.107$$

которая, как и N_φ, не зависит от координат положения тела.

Вектор скорости определим из (3.89). Для этого подставим значение $\dot{\varphi}$ из выражения (3.101) и результат вычисления производной функции z из (3.104):

$$\vec{v} = 0\vec{e}_\rho + R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z = 0\vec{e}_\rho + g\frac{2\pi R}{h}\frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}t\vec{e}_\varphi - g\frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}t\vec{e}_z \qquad 3.108$$

Из (3.108) приходим к выводу, что имеются две отличных от нуля составляющих вектора скорости в базисе $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$, нарастающих во времени по линейному закону.

Полагаем полезным рассмотреть вопрос – можно ли простыми вычислениями убедиться в правильности выражения (3.108)? Покажем, что это возможно, если воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии, на обсуждении которой мы подробно остановимся при изучении понятия криволинейного интеграла. Содержание этой теоремы в этом месте приведем в следующей редакции:

Пусть тело перемещается из начального состояния в конечное по некоторой траектории L. **Изменение кинетической энергии тела, при перемещении из начального состояния в конечное, равно сумме работ вдоль траектории L всех сил, действующих на тело.**

На основании этой теоремы простыми рассуждениями рассчитывается **абсолютное** значение скорости. В нашем случае начальная кинетическая энергия равна нулю, так как в начальный момент тело покоилось. Следовательно, изменение кинетической энергии равно кинетической энергии T_f в конечном состоянии:

$$T_f = \frac{mv_f^2}{2} \qquad 3.109$$

где v_f абсолютная величина скорости в этом состоянии. Далее находим работу сил, действующих на тело. Одна из них есть сила реакции опоры $\vec{N}$. Так как сила $\vec{N}$ ортогональна вектору перемещения, то элемент работы, равный скалярному произведению вектора силы и вектора перемещения, обращается в нуль. Отсюда работа силы реакции опоры вдоль всей траектории также равна нулю. Что касается работы второй силы, то, как известно, работа силы тяжести не зависит от формы кривой движения тела. В вертикальном направлении путь, пройденный телом, равен высоте спирали H. Работа сила тяжести A_{mg}, очевидно, равна

$$A_{mg} = mgH \qquad 3.110$$

Следуя теореме об изменении кинетической энергии, из выражений (3.109) и (3.110) получаем известное выражение для модуля скорости

$$v_f = \sqrt{2gH} \qquad 3.111$$

Проверим, что из выражения (3.108) следует результат (3.111). Обозначим через t_0 время, за которое тело, начав движение из точки спирали при $z = H$ достигает нижнего положения при $z = 0$. Подставляя значения $z = 0$ и $t = t_0$ в ранее найденную зависимость (3.104) координаты z от времени и решая полученное уравнение относительно t_0, получим

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}\left[1 + \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2\right]} \qquad 3.112$$

С другой стороны, абсолютное значение скорости v в любой момент времени t, как видно из (3.108), равно

$$v = g\frac{t}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}} \qquad 3.113$$

Если в (3.113) подставить $t = t_0$ из(3.112), то найдем модуль скорости v_f тела в конечном состоянии, значение которого равно $\sqrt{2gH}$ и совпадает с выражением (3.111).

Пример№6. *Составить систему уравнений в цилиндрических координатах* $\{\rho, \varphi, z\}$, *определяющих траекторию движения тела в плоскости* $z = 0$ *вокруг неподвижного центра притяжения, расположенного в начале координат. Предполагается, что сила, действующая на тело, имеет вид*

$$\vec{F} = -f(\rho)\,\vec{e}_\rho \qquad \mathit{3.114}$$

и $f(\rho) > 0$, *так как по условию задачи на тело действует сила притяжения.*
В частном случае

$$f(\rho) = \gamma\frac{mM}{\rho^2} \qquad 3.115$$

речь идет об определении траектории движения тела, взаимодействующего с центром массы M, который, как доказывается в механике, с определенной точностью можно считать неподвижным при соблюдении условия $M \gg m$.(астрономия, траектории спутников)
Если положить

$$f(\rho) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{\rho^2} \qquad 3.116$$

где в числителе стоит произведение модулей зарядов противоположного знака, ε и ε_0 диэлектрическая постоянная среды и электрическая постоянная соответственно, то придем к задаче определения траектории заряда q_1в поле заряда q_2, когда масса последнего много больше массы заряда q_1.
Выписать требуемые уравнения не составит труда. Естественно, мы воспользуемся общими уравнениями (3.42÷ 3.44) и, в соответствии с данными примера, конкретизируем вид уравнений движения.
Как и ранее, траектория определяется зависимостью координат положения тела $\{\rho, \varphi. z\}$ от времени. В отличие от предыдущих примеров теперь уже пара переменных $\{\rho, \varphi\}$ зависит от времени, а координата z задана и равна нулю. Следовательно, имеем

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = 0 \qquad 3.117$$

Для составляющих $\{F_\rho, F_\varphi, F_z\}$ силы $\vec{F}$, согласно 2.5.2, имеем

$$F_\rho = -f(\rho), \;\; F_\varphi = 0, \;\; F_z = 0, \qquad 3.118$$

Подставим наши заготовки (3.117) и (3.118) в (3.42÷ 3.44). Уравнение (3.44) обращается в тождество, поэтому выпишем уравнения для координат $\{\rho, \varphi\}$

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -f(\rho) \qquad 3.119$$

$$m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0 \qquad 3.120$$

Решение системы уравнений (3.119÷3.120) относительно координат $\{\rho, \varphi\}$ при заданных начальных условиях определяет конкретный вид траектории движения тела. Степень сложности решения системы уравнений (3.119÷ 3.120) определяется зависимостью силы от расстояния ρ. К нашему *удовольствию*, для важной с прикладной точки зрения зависимости $f(\rho) \sim \frac{1}{\rho^2}$, удается найти общее решение обсуждаемой системы уравнений.
Решение этой системы уравнений мы рассмотрим в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь же обратим внимание на частный случай, который описываются системой уравнений (3.119), (3.120).
Если считать $\rho = R$ постоянной величиной и подставить в (3.119÷ 3.120), то вернемся к ситуации примера №2, т.е. к движению по окружности с постоянной скоростью. Окружность соответствует предельной форме эллипса при стремлении эксцентриситета к нулю. Теперь естественно предположить, что существует решение и при других значениях эксцентриситета, то есть осуществляются траектории, которые, в зависимости от начального положения и скорости, имеют вид конических сечений (эллипс, парабола, гипербола). Мы вернемся к обсуждению этого предложения в разделе обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.5 Уравнения движения частицы в сферической системе координат

Проиллюстрируем применение полученных в пункте 3.2 общих соотношений в случае сферических координат $\{r, \theta, \varphi\}$. Подставим в (3.30÷ 3.32) вместо переменных $\{q^1, q^2, q^3\}$ координаты $\{r, \theta, \varphi\}$, векторы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ заменим на базисные векторы $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$, а для коэффициентов Ламэ воспользуемся их выражениями (2.22). В результате простых вычислений придем к следующему виду производных базисных векторов по координатам:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\, \vec{e}_\varphi, \tag{3.121}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\, \vec{e}_\varphi, \tag{3.122}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\, \vec{e}_r - \cos\theta\, \vec{e}_\theta \tag{3.123}$$

Последовательно подставляя выражения (3.121÷3.123) в (3.27÷3.29) находим значения производных базисных векторов по времени:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\, \vec{e}_\varphi\,, \tag{3.124}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\, \vec{e}_\varphi\,, \tag{3.125}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial t} = -\dot{\varphi}\sin\theta\, \vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\, \vec{e}_\theta, \tag{3.126}$$

Теперь осталось подставить соотношения (3.124÷3.126) в выражение для ускорения (3.26) и собрать коэффициенты при базисных векторах $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$. После требующих определенного внимания действий, получаем разложение вектора ускорения в базисе сферической системы координат:

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - r\dot{\varphi}^2(\sin\theta)^2\right]\vec{e}_r + \left[\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + \dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right]\vec{e}_\theta +$$

$$\left[\frac{d(r\dot{\varphi}\sin\theta)}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right]\vec{e}_\varphi \tag{3.127}$$

Не трудно проверить, что для коэффициентов при векторах $\vec{e}_\theta$ и $\vec{e}_\varphi$ в (3.127) имеют место равенства:

$$\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + \dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \tag{3.128}$$

$$\frac{d(r\dot{\varphi}\sin\theta)}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d\left(r^2\dot{\varphi}(\sin\theta)^2\right)}{dt} \tag{3.129}$$

Введем в выражение для ускорения (3.127) соотношения (3.128, 3.129). Это позволит записать вектор ускорения в более компактном виде:

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - r\dot{\varphi}^2(\sin\theta)^2\right]\vec{e}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right]\vec{e}_\theta +$$

$$\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d\left(r^2\dot{\varphi}(\sin\theta)^2\right)}{dt}\right]\vec{e}_\varphi \qquad 3.130$$

Чтобы получить уравнения движения в сферических координатах, достаточно подставить (3.130) в выражение второго закона Ньютона (3.24) и приравнять составляющие в левой части равенства проекциям $\{F_r, F_\theta, F_\varphi\}$ равнодействующей силы $\vec{F}$, имея в виду, что:

$$\overrightarrow{F} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi \qquad 3.140$$

В результате этих действий определится вид динамических уравнений движения тела в сферических координатах:

$$m\left(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - r\dot{\varphi}^2(\sin\theta)^2\right) = F_r \qquad 3.141$$

$$m\left[\frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right] = F_\theta \qquad 3.142$$

$$m\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d\left(r^2\dot{\varphi}(\sin\theta)^2\right)}{dt}\right] = F_\varphi \qquad 3.143$$

Мы вернемся к этой системе уравнений относительно функций r, θ, φ в разделе теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а сейчас рассмотрим пример их применения.

Поставим следующую задачу: вывести уравнение движения математического маятника в вертикальной плоскости из системы уравнений (3.141÷3.143) в постоянном гравитационном поле, полагая длину нити подвеса равной l.

Движение маятника является частным случаем движений, описываемых уравнениями (3.141÷3.143). Это следует из того, что в нашем варианте движения из трех, в общем случае, неизвестных функций r, θ, φ, требуется найти лишь уравнение для угла отклонения $\alpha = \pi - \theta$. см.рис.8. Относительно двух других функций из условия задачи известно, что $r = l$, а угловую переменную φ можно положить равной, например нулю. Последнее означает, что движение происходит в вертикальной плоскости ZOX. Что касается правых частей уравнений, то, как видно из рис.8 проекции F_r, F_θ, F_φ равнодействующей сил натяжения нити T и силы тяжести легко определяются и соответственно равны:

$$F_r = mg\cos\alpha - T \qquad 3.144$$

$$F_\theta = mg\sin\alpha \qquad 3.145$$

$$F_\varphi = 0 \qquad 3.146$$

Теперь осталось подставить полученные выражения F_r, F_θ, F_φ, а также значения $\theta = \pi - \alpha, r = l, \varphi = 0$ в систему (3.140÷3.143). В результате получим существенно более простые уравнения относительно угла отклонения α и натяжения нити T:

$$-m\dot{\alpha}^2 l = mg\cos\alpha - T \qquad 3.147$$

$$-l\ddot{\alpha} = g\sin\alpha \qquad 3.148$$

при этом третье уравнение (3.146) обращается в тождество. Уравнение (3.148) не зависит от первого уравнения и описывает изменение угла с течением времени. Это уравнение нелинейное и его рассмотрение требует специального исследования. В курсе общей физики обсуждается простой вариант так называемых малых колебаний с использованием приближения $\sin\alpha \sim \alpha$. В рамках отмеченного приближения уравнение линеаризуется и принимает знакомый из школьной программы вид:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0. \qquad 3.149$$

из которого следует, что угловая частота определяется формулой:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad 3.150$$

Что касается уравнения (3.147), то оно, при известной зависимости угла отклонения от времени, служит для определения величины силы натяжения и находится по формуле

$$T = mg\cos\alpha + m\dot{\alpha}^2 l, \qquad 3.151$$

следующей из (3.147).

3.6.Динамика: уравнения Лагранжа в обобщенных координатах.

Отличительной особенностью аналитического исследования задач механики является применение при формулировке уравнений движения механических систем обобщенных координат. *Обобщенными координатами* механической системы называются некоторые целесообразно выбранные независимые переменные, определяющие положение системы в пространстве. Такими координатами могут быть, в частности, криволинейные координаты: полярные на плоскости, цилиндрические, сферические и другие.
В дальнейшем ограничимся случаями, в которых обобщенные координаты являются криволинейными координатами.
Заметим, что переход от описания движения в прямоугольных декартовых координатах к обобщенным координатам может не только упростить решение задачи, но и оказаться необходимым в случаях, когда на исследуемую механическую систему наложены связи. С такой не простой ситуацией мы сталкиваемся даже в случае движения одной частицы, если она вынуждена двигаться по заданной траектории (на пример по спирали) или некоторой поверхности (на пример по параболоиду вращения).

Ранее, в пунктах 3.2÷3.5, мы уже использовали криволинейные (обобщенные) координаты и определили вид уравнений движения в цилиндрических и сферических координатах, основываясь на втором законе Ньютона. Там же отмечалось, что технические трудности вывода уравнений движения сосредоточены в задаче отыскания производных базисных векторов по координатам и времени (формулы (3.26÷3.32)).

Лагранж дал иную, в сравнении со вторым законом Ньютона, изящную эквивалентную этому закону формулировку, выраженную в терминах кинетической энергии T составляющих систему частиц и исходившего из сформулированного им принципа наименьшего действия. Уравнения движения механической натуральной (голономной) системы с n степенями свободы, предложенные Лагранжем, имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial u^i} = Q_i, (i = 1, \dots, n) \qquad 3.152$$

где $t -$ время, $u^1, u^2, \dots, u^n$ обобщенные координаты, определяющие положение системы в пространстве, Q_i- обобщенные силы индекса i, выражающиеся для консервативных силовых полей через потенциальную энергию П известным соотношением:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial u^i} \quad (i = 1, \dots, n) \qquad 3.153$$

Подчеркнем, что число уравнений вида (3.152) равно числу независимых обобщенных координат. Заметим также, что обобщенные координаты могут иметь разную размерность. В силу этого обстоятельства размерности обобщенных сил, как это следует из определения (3.153), вообще говоря, будут различными.

Оставляя в стороне огромное значение лагранжева подхода не только в механике, но и других разделах физики, отметим, что он лишен выше упомянутых технических неудобств вычисления производных базисных векторов по координатам. Это следует из того, что уравнения (3.151 ÷ 3.152) формулируются в понятиях кинетической и потенциальной энергий, которые являются скалярными величинами и не требуют введения базисных векторов.

Уравнения Лагранжа (3.151) определяют порядок действий, который следует осуществить для составления уравнений движения механической системы в криволинейных координатах, т.е. дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат u^i при заданной потенциальной энергии взаимодействия. Как видно из структуры уравнений (3.151), следует найти частные производные от кинетической энергии по каждой обобщенной скорости $\dot{u}^i$, что потребует знания зависимости кинетической энергии от этих переменных. Нахождение указанной зависимости в конкретных задачах не представляет принципиальных сложностей. Так, в случае движения одной частицы вид кинетической энергии в произвольных ортогональных координатах, которые в этом случае играют роль обобщенных координат, легко устанавливается на основе выражений (3.11) и (3.17) заменой обозначений q^i на u^i.

В качестве иллюстраций к использованию уравнений Лагранжа для вывода уравнений движения частицы в криволинейных координатах, рассмотрим несколько примеров, включающих ранее рассмотренные варианты уравнений движения в цилиндрических и сферических координатах, а также случай движения частицы по заданной поверхности.

Вывод уравнений движения частицы в цилиндрической системе координат. В интересующем нас случае роль обобщенных координат u^1, u^2, u^3 и обобщенных скоростей $\dot{u}^1, \dot{u}^2, \dot{u}^3$ играют цилиндрические координаты ρ, φ, z и $\dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}$ соответственно, а выражение для кинетической энергии, как функции этих переменных, было найдено ранее и, согласно (3.18), имеет вид:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^{\,2} + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^{\,2}) \qquad 3.154$$

Следуя обсужденному порядку вычислений, имея в виду выражение (3.154), находим частные производные по $\dot{u}^1 = \dot{\rho}$ и $u^1 = \rho$ от кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^1} \to \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \qquad 3.155$$

$$\frac{\partial T}{\partial\, u^1} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 \qquad 3.156$$

Далее, снова следуя порядку действий, задаваемых уравнением (3.152), находим производную по времени от выражения (3.155):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^1}\right) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) = m\ddot{\rho} \qquad 3.157$$

Подставляя теперь (3.156) и (3.157) в (3.152, получим первое из уравнений движения:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = Q_\rho \qquad 3.158$$

где введено обозначение

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial\, u^1} \rightarrow \quad Q_\rho = -\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \qquad 3.159$$

Сравнение выражения (3.158) с выражением (3.42), полученным другим способом, показывает, что с точностью до обозначений в правых частях, уравнения совпадают, и

$$Q_\rho = \ F_\rho \qquad 3.160$$

Получим далее второе уравнение. Имея ввиду, что $\dot{u}^2 = \dot{\varphi}$ и $u^2 = \varphi$, находим, что:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^2} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \qquad 3.161$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^2} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \qquad 3.162$$

Вычисление производной по времени от выражения (3.161) приводит к следующему результату:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = \ m\rho(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \qquad 3.163$$

После подстановки этого выражения совместно с результатом (3.162) в (3.152) и деления на ρ, получим второе уравнение движения частицы следующего вида:

$$m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = \frac{1}{\rho}\ Q_\varphi \qquad 3.164$$

здесь Q_φ обобщенная сила, соответствующая переменной φ и определенная равенством:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \qquad 3.165$$

Левые части уравнений (3.164) и (3.43) совпадают, а из сравнения правых частей следует, что проекция силы F_φ на направление базисного вектора $\vec{e}_\varphi$ связана с обобщенной силой Q_φ соотношением:

$$F_\varphi = \frac{1}{\rho}\ Q_\varphi \quad 3.166$$

Наконец, полагая $\dot{u}^3 = \dot{z}$ и $u^3 = \mathrm{z}$, находим частные производные по соответствующим переменным от выражения кинетической энергии (3.154):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^3} \to \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad 3.167$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^3} \to \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad 3.168$$

и производную по времени от обеих частей (3.167):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z} \quad 3.169$$

Третье уравнение получим после подстановки равенств (3.168, 3.169) в (3.152):

$$m\ddot{z} = \ Q_z, \quad 3.170$$

где обобщенная сила Q_z равна:

$$Q_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad 3.171$$

Уравнение движения (3.168) совпадает с ранее полученным уравнением (3.44), при этом

$$Q_z = \ F_z. \quad 3.172$$

Обсудим формулы (3.160, 3.166, 3.172), определяющие функциональные зависимости между физическими составляющими $\{F_\rho, F_\varphi, F_z\}$ вектора силы $\vec{F}$

$$\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z \quad 3.173$$

и обобщенными силами Q_iс индексами $i = \rho, \varphi, z$ на уровне следующих рассуждений. В потенциальном поле вектор силы $\vec{F}$ выражается через потенциальную энергию П операцией градиента:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\Pi. \quad 3.174$$

Воспользуемся представлением градиента в цилиндрических координатах и перепишем равенство (3.174) в виде:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\Pi \ = \ -\frac{\partial\ \Pi}{\partial \rho}\vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi - \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{e}_z \quad 3.175$$

Приведенное выражение есть разложение вектора силы по ортонормированному базису, а потому коэффициенты разложения в (3.175) являются физическими составляющими вектора $\vec{F}$. и, сопоставляя равенства (3.173, 3.175), приходим к выводу, что:

$$F_\rho = -\frac{\partial \Pi}{\partial \rho},\ \ F_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi},\ \ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \qquad 3.176$$

С другой стороны, обобщенные силы определены как частные производные по соответствующим цилиндрическим координатам (3.159, 3.165, 3.171), а именно:

$$Q_\rho = -\frac{\partial \Pi}{\partial \rho},\quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi},\quad Q_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \qquad 3.177$$

Заменяя частные производные в (3.176) их значениями (3.177), установим отношения между наборами составляющих $\{F_\rho, F_\varphi, F_z\}$ и обобщенными силами $\{Q_\rho, Q_\varphi, Q_z\}$:

$$F_\rho = Q_\rho,\ \ F_\varphi = \frac{1}{\rho}\,Q_\varphi,\quad F_z = \ Q_z. \qquad 3.178$$

которые тождественны ранее установленным формулам (3.160, 3.166, 3.172). Наконец, соотношения (3.178) являются следствием общих соотношений (1.49) между ковариантными и физическими составляющими вектора. Действительно, ранее было показано, что частные производные (1.60) являются ковариантными составляющими. Следовательно, и набор частных производных $Q_\rho,\ Q_\varphi,\ \ Q_z$ (3.177) образует ковариантные компоненты, связи которых с физическими составляющими определяются выражениями (1.49). Заменяя в этих формулах A_1, A_2, A_3 на $Q_\rho,\ Q_\varphi,\ Q_z$ и подставляя значения коэффициентов Ламэ цилиндрических координат, получим тот же результат (3.178).

Вывод уравнений движения частицы в сферической системе координат. В данном случае роль обобщенных координат u^1, u^2, u^3 и обобщенных скоростей $\dot{u}^1, \dot{u}^2, \dot{u}^3$ играют сферические координаты r, θ, φ и $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ соответственно. Выражение для кинетической энергии, как функции этих переменных, согласно (3.23), имеет вид:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^{\,2} + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + (r\sin\theta\,\dot{\varphi})^{\,2}\right) \qquad 3.179$$

Следуя тому же порядку вычислений, что и в цилиндрических координатах, имея в виду выражение (3.179), находим частные производные по $\dot{u}^1 = \dot{r}$ и $u^1 = r$ кинетической энергии T:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^1} \to \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad 3.180$$

$$\frac{\partial T}{\partial\, u^1} \to \frac{\partial T}{\partial r} = m(r\dot{\theta}^2 + r(\sin\theta\,\dot{\varphi})^2) \qquad 3.181$$

Далее находим производную по времени выражения (3.180):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^1}\right) \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} \qquad 3.182$$

Подставляя теперь (3.181) и (3.182) в (3.152), получим первое из уравнений движения:

$$m\big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r(\sin\theta\,\dot{\varphi})^2\big) = Q_r \qquad 3.183$$

где введено обозначение

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial\, u^1} \rightarrow \quad Q_r = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} \qquad 3.184$$

Сравнение выражения (7) с выражением (3.141), полученным другим способом, показывает, что с точностью до обозначений в правых частях, уравнения совпадают, и

$$Q_r = \; F_r \qquad 3.185$$

Получим далее второе уравнение. Полагая $\dot{u}^2 = \dot{\theta}$ и $u^2 = \theta$, находим, что:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^2} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad 3.186$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^2} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \theta} = m \sin\theta \cos\theta \,(r\dot{\varphi})^{\,2} \qquad 3.187$$

Вычисление производной по времени выражения (3.186) приводит к следующему результату:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = \; m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) \qquad 3.188$$

После подстановки выражений (3.187, 3.188) в (3.152) и деления на r, получим второе уравнение движения частицы следующего вида:

$$m\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta\right) = \frac{1}{r}\; Q_\theta \qquad 3.189$$

здесь Q_θ обобщенная сила, соответствующая переменной θ и определенная равенством:

$$Q_\theta = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \qquad 3.190$$

Левые части уравнений (3.189) и (3.142) совпадают, а из сравнения правых частей следует, что проекция силы F_θ на направление базисного вектора $\vec{e}_\theta$ связана с обобщенной силой Q_θ соотношением:

$$F_\theta = \frac{1}{r}\; Q_\theta \qquad 3.191$$

Наконец, полагая $\dot{u}^3 = \dot{\varphi}$ и $u^3 = \varphi$, находим частные производные по соответствующим переменным от кинетической энергии (3.179):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^3} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\dot{\varphi}(r\sin\theta)^{\,2} \qquad 3.192$$

$$\frac{\partial T}{\partial\, u^3} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \qquad 3.193$$

и, производную по времени от обеих частей (3.192):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{\varphi}(r\sin\theta)^{\,2}\right) = m\,\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}(\sin\theta)^{\,2}\right) \qquad 3.194$$

Третье уравнение получим после подстановки равенств (3.193, 3.194) в (3.152):

$$m\,\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}(\sin\theta)^{\,2}\right) = \;Q_\varphi \qquad 3.195$$

где по определению

$$Q_\varphi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}. \qquad 3.196$$

Разделим обе части уравнения (3.195) на произведение $(r\sin\theta)$ и запишем его в виде:

$$m\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}(\sin\theta)^{\,2}\right) = \frac{Q_\varphi}{r\sin\theta}\;\;. \qquad 3.197$$

из сравнения которого с выражением (3.143), устанавливаем равенство левых частей уравнений (3.197) и (3.143). Что касается правых частей этих уравнений, то для них должно иметь место равенство:

$$F_\varphi = \frac{Q_\varphi}{r\sin\theta} \qquad 3.198$$

Обсудим формулы (3.185, 3.191, 3.198), определяющие функциональные зависимости между физическими составляющими $\{F_r, F_\theta, F_\varphi\}$ вектора силы $\vec{F}$

$$\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi \qquad 3.199$$

и обобщенными силами Q_iс индексами $i = r, \theta, \varphi$.на основе следующих соображений. В потенциальном поле вектор силы $\vec{F}$ выражается через потенциальную энергию П операцией градиента:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\Pi. \qquad 3.200$$

Воспользуемся представлением градиента в сферических координатах и перепишем равенство (3.200) в виде:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\Pi \;=\; -\frac{\partial\,\Pi}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad 3.201$$

Приведенное выражение есть разложение вектора силы по ортонормированному базису, а потому коэффициенты разложения в (3.201) являются физическими составляющими вектора $\vec{F}$, и, сопоставляя равенства (3.200, 3.201), приходим к выводу, что:

$$F_r = -\frac{\partial\,\Pi}{\partial r},\;\; F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial\theta},\;\; F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} \qquad 3.202$$

С другой стороны, обобщенные силы определены как частные производные по соответствующим сферическим координатам (3.184, 3.190, 3.196), а именно:

$$Q_r = -\frac{\partial\Pi}{\partial r},\quad Q_\theta = -\frac{\partial\Pi}{\partial\theta},\quad Q_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} \qquad 3.203$$

Заменяя частные производные в (23) их значениями (24), установим отношения между наборами физических составляющих $\{F_\rho, F_\varphi, F_z\}$ и обобщенными силами $\{Q_\rho, Q_\varphi, Q_z\}$:

$$F_r = Q_r,\ \ F_\theta = \frac{1}{r}\,Q_\theta,\ \ \ F_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}Q_\varphi. \qquad 3.204$$

которые тождественны ранее установленным формулам (3.185, 3.191, 3.198).
Как и в случае цилиндрических координат, результат (3.204) можно было предвидеть заранее. Действительно, он следует из общих соотношений (1.49), если учесть, что частные производные (3.203), согласно общей теории, являются ковариантными составляющими (1.60).

Движение частицы по поверхности.

Пусть уравнения поверхности Σ, по которой вынуждена двигаться частица под действием результирующей силы $\vec{F}$, заданы в параметрической форме:

$$\Sigma:\ q^i = q^i(u^1, u^2) \quad\ (i = 1{,}2{,}3) \qquad 3.205$$

Здесь q^i, как и ранее, криволинейные координаты (в частности, это могут быть декартовы координаты). Параметры u^1, u^2служат примером обобщенных координат, определяющих положение частицы на поверхности Σ. В результирующую силу $\vec{F}$ включена также сила реакции опоры. По условию задачи поверхность является гладкой (трение отсутствует). В таком случае реакция опоры $\vec{N}$, действующая на частицу со стороны поверхности, нормальна к Σ и представляет собой воздействие, вынуждающее частицу оставаться на ней. Рассмотрим теперь следующую конкретную задачу:

определить вид уравнений движения частицы массы m, вынужденной двигаться по гладкому параболоиду вращения

$$z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2) \qquad 3.206$$

в поле силы тяжести.

Величина a - заданный параметр, который будем считать положительным.
Так как геометрия задачи обладает симметрией вращения относительно оси z, то естественно провести ее анализ в цилиндрической системе координат. Используя соотношения:

$$x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,,\ z = z, \qquad 3.207$$

определяющие связи между прямоугольными декартовыми и цилиндрическими координатами, и подставляя их в (3.206), преобразуем выражение (3.206) к виду

$$z = \frac{\rho^2}{2a} \qquad 3.208$$

Введем теперь параметрические координаты поверхности, которые и будут выполнять роль обобщенных координат в уравнениях Лагранжа (3.152), положив $u^1 = \rho, u^2 = \varphi$. Уравнения (3.205) в нашем случае, т.е. уравнения параболоида в цилиндрических координатах в параметрическом виде определятся как:

$$\rho = u^1 = \rho$$
$$\varphi = u^2 = \varphi \qquad 3.209$$

$$z = \frac{(u^1)^2}{2a} = \frac{\rho^2}{2a}$$

Выражение для кинетической энергии в цилиндрических координатах, как уже не раз отмечалось, имеет вид:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^{\,2} + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^{\,2}) \qquad 3.210$$

Однако переменные ρ, φ, z в этом соотношении не являются независимыми переменными, что очевидно следует из параметрического задания параболоида (3.209).В силу этого тройка переменных ρ, φ, z не может служить обобщенными координатами. Обобщенными координатами являются, как уже отмечалось выше, лишь пара переменных ρ, φ, в которых и следует записать кинетическую энергию (3.210). Для этой цели воспользуемся последним из уравнений (3.209), из которого следует, что

$$\dot{z}^{\,2} = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho^2}{2a}\right)\right)^2 = \left(\frac{\rho\dot{\rho}}{a}\right)^2 = \frac{\rho^2\dot{\rho}^{\,2}}{a^2} \qquad 3.211$$

и подставим выражение (3.211) в (3.210). В итоге получим выражение кинетической энергии в обобщенных координатах ρ, φ:

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^{\,2}(1 + \frac{\rho^2}{a^2}) + (\rho\dot{\varphi})^2\right] \qquad 3.212$$

что позволит провести вычисления в левой части уравнений Лагранжа (3.152). Прежде чем приступить к этой части вычислений, определим зависимость потенциальной энергии от обобщенных координатах ρ, φ, что совсем нетрудно сделать. Потенциальная энергия П гравитационного поля равна mgz, и принимает, с учетом последнего соотношения (3.209), форму:

$$\Pi = \frac{mg\rho^2}{2a} \qquad 3.213$$

т.е. зависит от одной переменной ρ. Так как в нашем случае две обобщенные координаты, то, из уравнений Лагранжа (3.152), после вычисления соответствующих производных кинетической (3.212) и потенциальной 3.213) энергий, получим два уравнения относительно функций $\rho(t), \varphi(t)$:

$$\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)\ddot{\rho} + \frac{\rho\dot{\rho}^2}{a^2} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\frac{g\rho}{a} \qquad 3.214$$

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \qquad 3.215$$

которые, совместно с уравнением (3.208), дают описание движения частицы по поверхности в трехмерном пространстве.

Уравнение (3.215) легко интегрируется, что дает уравнение сохранения момента

$$\rho^2\dot{\varphi} = h = Const. \qquad 3.216$$

Здесь h - постоянная интегрирования. На основе этого соотношения исключим $\dot{\varphi}$ из уравнения (3.214). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно одной функции $\rho(t)$:

$$\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\ddot{\rho}+\frac{\rho\dot{\rho}^2}{a^2}-\frac{h^2}{\rho^3}=-\frac{g\rho}{a} \qquad 3.217$$

Решение уравнения (3.217) и определение реакции опоры $\vec{N}$, вынуждающей двигаться частицу по параболоиду, сопряжены со значительными трудностями вычислительного характера и анализ обсуждаемого уравнения проводится в специальной литературе по аналитической механике. Мы же остановимся на частных случаях движения и на их основе сделаем некоторые полезные выводы.

Пусть частица движется по горизонтальной окружности $\rho = Const$, расположенной на параболоиде. Так как ρ не зависит от времени, то производные, присутствующие в уравнении (3.217), обращаются в нуль, и мы приходим к условию

$$h^2=\frac{g\rho^4}{a} \qquad 3.218$$

при котором такое движение возможно. Из уравнений (3.216, 3.218) следует, что угловая скорость

$$\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{g}{a}} \qquad 3.219$$

не зависит от радиуса окружности.

Рассмотрим вариант движения, при котором угол φ остается постоянным. Уравнение (3.215) выполняется при этом условии тождественно, а уравнение (3.214) принимает форму:

$$\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\ddot{\rho}+\frac{\rho\dot{\rho}^2}{a^2}+\frac{g\rho}{a}=0 \qquad 3.220$$

Положим, что частица находится на дне параболоида вращения и ей сообщено малое отклонение (так, что величину ρ можно считать малой). Оставляя в правой части (3.220) члены первого порядка малости по ρ, получим простое линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{\rho}+\frac{g\rho}{a}=0 \qquad 3.221$$

общее решение которого

$$\rho(t)=A\sin(\omega t+\delta) \qquad 3.222$$

указывает на колебательный характер движения с угловой частотой колебаний

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{a}} \qquad 3.223$$

где A, δ в выражении (3.222) постоянные, определяемые по начальным условиям.

Выясним, какой физический смысл имеет величина a в знаменателе выражения (43). С этой целью вычислим радиус кривизны кривой, получающейся в результате нормального сечения параболоида вращения, проходящего через его вершину. В любом нормальном сечении уравнение обсуждаемой кривой имеет один и тот же вид:

$$z = \frac{\rho^2}{2a} \qquad 3.224$$

Напомним, что радиус кривизны R плоской кривой, заданной в явной форме $y = f(x)$, находится по формуле:

$$R = \frac{\left(1+{y'_x}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''_{xx}|} \qquad 3.225$$

В нашем случае

$$y'_x \to z'_\rho = \frac{\rho}{a}, \quad y''_{xx} \to z''_{\rho\rho} = \frac{1}{a}, \qquad 3.226$$

Остается подставить эти значения в выражение (3.225) и учесть, что нас интересует величина радиуса кривизны при $\rho = 0$ (вершина параболы). В результате найдем, что:

$$R = a \qquad 3.227$$

Итак, знаменатель в формуле (3.223) имеет смысл радиуса кривизны кривой нормального сечения в вершине параболоида. Аналогично и в уравнении (3.149) длину нити можно интерпретировать как радиус кривизны траектории.